잉여류와 잉여계

어떤 사람들은 웃겠지만, 내가 '잉여류와 잉여계'라는 말을 처음 들었을 때 생각한 것은 '잉어'였다. 하지만 수학에서의 잉여류와 잉여계의 문제가 잉어와 관련될 리는 없다. '잉여류와 잉여계'라는 것은 무엇을 뜻하는 말인가?

"잉여(剩餘)"라는 말은 '남은 것', 혹은 '나머지'란 뜻이다. 잉여류란 나머지들의 종류이고 잉여계는 나머지들의 세계를 뜻한다고 이해하면 어느 정도 이해할 수 있을 것이다. 따라서 '잉여류와 잉여계'는 수학에서의 '나머지에 관한 문제들'이라고 생각하면 된다.

왜 이런 어려운 말을 쓸까? 나도 모른다. 아마도 처음에 모든 이름을 다소 억지로 한자말로 붙였거나 아니면 일본 용어를 그대로 번역했기 때문일 것이다.

나머지란 어디서 생기는가? 나눗셈을 했을 때 생긴다. 더하기, 곱하기, 빼기를 해서는 나머지가 생기지 않는다. 그런데 나눗셈을 하더라도 분수를 생각한다면 나머지가 생길 수 없다. $7\div4=\frac{7}{4}$라고 할 수 있을 테니까. 크기가 계단처럼 나눠진 수, 즉 정수를 생각해야만 나머지가 생긴다. 즉 $7\div4=1$, 나머지 3- 이렇게.

따라서 잉여류와 잉여계에서 다루는 모든 문제는 정수에 대하여 나눗셈을 할 때 생기는 숫자들의 관계라고 생각하면 된다.

우리가 정수에 대해서 나머지 문제를 생각할 수 있는 까닭은 정수가 자연수를 바탕으로 만들어졌으며, 자연수는 더하기와 곱하기로 얼마든지 분해하거나 만들 수 있기 때문이다. 이것은 너무나 당연한 말처럼 들리겠지만 그래도 그 의미하는 바가 크다.

그러므로 모든 정수는 곱하기와 더하기를 통하여 만들 수 있다. 무슨 말이냐 하면 37을 5를 가지고 만들고자 한다면 $5\times7+2=37$이 된다. 그 뿐인가? 6을 가지고 만들고자 한다면 $6\times6+1=37$이 될 것이다.

앞에서 자연수의 기본 성질에 수학적 귀납법이 들어있다고 얘기를 했는데 그 말은 쉽게 얘기해서 1씩 크고 작은 차이들이 있다는 점이 자연수의 성질이라고 말할 수 있다. '1씩 크고 작다'와 '1씩 세어가는 것', 어떤 관련성이 있어 보일 것이다. 그렇다면 자연수에는 당연히 더하기와 곱하기가 포함되어 있다고 생각할 수 있을 것이다. 그리고 더하기와 곱하기의 역함수가 빼기와 나누기이다. 단 빼기와 나누기는 자연수 집합에 대하여 닫혀있지는 않다.

<<잠시 앞에서 설명한 내용을 기억해 보면, 자연수와 0, 그리고 '음수 기호(-)'를 가지고 정수를 만들며 정수와 자연수, 그리고 '서로소'의 개념을 가지고 유리수를 만든다. 그런데 서로소란 곱하기에서 나오는 것이다. 따라서 자연수와 0, 음수기호, 그리고 사칙연산을 가지고 자연수에서 정수와 유리수로 나아간다. 왜 정수와 유리수로 나아가게 되었을까? 그것은 빼기와 나누기가 자연수에 대하여 닫혀있지 않아서 계산을 하다 보면 다른 숫자가 나오기 때문이었다.>>

한번 어릴 때의 기억을 더듬어 보자. 초등학교 교과서에서 곱하기를 배울 때를 기억할 수 있는지. 그 때를 기억할 수 있다면 학생들은 곱하기 뿐만 아니라 더하기의 성질도 같이 기억하게 될 것이다.

요즘은 교과서가 바뀌었는지 모르지만 옛날에는 더하기를 이렇게 배웠다. 즉, 사과가 3개가 있고 2개가 더 있으면 몇 개인가를 물을 때에, 3개를 말하면서 세어 본다- 하나, 둘, 셋, 그리고 2개를 말하면서 또 세어 본다-하나, 둘. 그 다음에 답이 5라는 것을 말하면서 전체를 센다, 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯.

그렇게 더하기를 배우고 나면 곱하기를 배우는데, 그 과정은 다음과 같다. 연필이 2개 있고, 또 2개 있고, 또 2개 있어서 전부 2개짜리 연필이 3개가 있으면 연필은 몇 개인가? 6개이다. 이것을 어떻게 표현하냐 하면

2(개 짜리 연필) ×3(묶음) = 6(연필 수)

이 과정을 잘 생각해 보면 덧셈과 곱셈의 성질을 잘 알 수 있다.

덧셈의 본성은 하나씩 세어나가는 것에 있다. 한편 곱셈의 본성은 똑같은 더하기를 몇번 했는가를 세는 데에 있다.

더하기가 세는 것인데 이 세기를 몇 번 했는지를 세는 것이다. 연필 이야기는 2개씩 더 세는 것을 3번 했다는 것을 보여준다. 따라서 곱하기는 더하기 위에 있다고 비유할 수 있다.

너무 당연하고 간단한 것에 대해 대단한 것처럼 얘기했나? 하지만 수학의 대부분의 개념은 처음에 너무 당연하고 간단했다. 수능에 출제되었던 잠시 후에 보게 될 <문제8>을 풀기 위해서는 이런 논리가 필요하다는 것을 알게 될 것이다.

나머지에 대해서 조금만 더 생각해 보고 넘어가자.

나머지의 종류를 어떻게 나눌 수 있을까? "나머지가 분수인 것, 나머지가 음수인 것,…" 이런 분류는 안된다. 나머지는 자연수에 대해서만 생각하기 때문이다. "나머지가 1인 것, 나머지가 2인 것…" 이런 분류가 가능하다. 그런데 7로 나눈 나머지가 8인 경우는 없을 것이다. 따라서 나머지는 "어떤 수로 나눈 나머지인가"와 꼭 관련된다. 그래서 "잉여류와 잉여계"를 다음과 같이 정의한다.

[1] 임의의 정수 a를 어떤 양의 정수 m으로 나눌 때,

$$a = mq + r \ (\text{단, } 0 \le r < m)$$

인 정수 q, r은 오직 하나 정해진다.

이건 당연한 말이겠지?

[2] 임의의 정수 a를 양의 정수 m으로 나눌 때, 나머지가 r인 정수의 집합을 M_r이라 하면,

① 어떤 정수도 M_0, M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1} 중의 어느 하나에 속하고,

② M_i와 M_j(단, $i \ne j$)에 공통원이 존재하지 않는다.

이 M_0, M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1}을 각각 모든 정수를 m으로 나누었을 때의 '잉여류'라 한다.

그리고 잉여류 M_0, M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1}의 각각의 임의의 한 원을 취하여 만든 집합을 잉여계라 하고 기호 R_m으로 나타낸다.

[2]는 다음과 같은 뜻이다.

즉 예를 들어서 모든 정수(=정수 중에서 아무거나=임의의 정수)를 3으로 나누면 그 수들은 나머지가 0인 경우와 1인 경우, 그리고 2인 경우 3가지로 나뉜다.

예를 들어서 나머지가 1인 수들(1, 4, 7, 10 …)과 나머지가 2인 수들(2, 5, 8, 11, …) 사이에는 공통적인 숫자가 하나도 없다.

> [2] 임의의 정수 a를 양의 정수 m으로 나눌 때, 나머지가 r인 정수의 집합을 M_r이라 하면,
> ① 어떤 정수도 M_0, M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1} 중의 어느 하나에 속하고,
> ② M_i와 M_j(단, $i \ne j$)에 공통원이 존재하지 않는다.
> 이 M_0, M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1}을 각각 모든 정수를 m으로 나누었을 때의 '잉여류'라 한다.
> 그리고 잉여류 M_0, M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1}의 각각의 임의의 한 원을 취하여 만든 집합을 잉여계라 하고 기호 R_m으로 나타낸다.

예를 들어서 3으로 나눈 경우에, 나머지가 0인 수들, 1인 수들, 2인 수들을 각각, 모든 정수를 3으로 나누었을 때의 '나머지들의 종류'라고 한다. 그리고 나머지가 0인 수(0이나 3 등) 아무거나, 그리고 나머지가 1인 수(1이나 4 등) 아무거나, 나머지가 2인 수(2나 5 등) 아무거나를 하나씩 뽑아서 만든 집합(예를 들어 {0, 1, 2}나 {3, 1, 5} 등)을 '나머지의 세계'라고 한다.

왜 {0, 1, 2}나 {3, 1, 5} 등을 나머지의 세계라 하냐 하면, 여기에 있는 수들을 3으로 나누면 항상 나머지 0, 1, 2

를 모두 얻을 수 있기 때문이다.

어떤 것이 나머지 문제인가?

<문제11> 2525년 여름쯤 2526년 1월의 계획을 세우려고 하는데, 그 해(2525년) 1월부터 12월까지의 달력은 있으나 새해(2526년) 1월의 달력이 없다. 이 때, 2526년 1월의 달력과 요일 및 날짜가 같게 구성된 달을 2525년의 달력 중에서 찾으면?

① 3월 ② 5월 ③ 7월 ④ 8월 ⑤ 없다.

잉여류와 잉여계 단원을 배운 직후에 여러분이 이 <문제6>을 풀게 되는 것이 아니라 다른 단원의 문제들과 섞인 시험지 속에서 보게 되었다고 생각해 보자. 이 문제를 잉여류와 잉여계의 개념을 활용해서 풀어야 하는지를 어떻게 알 수 있을까? 그것은 다음의 두가지 특징 때문이다.

① 첫째로 일정한 수를 단위로 해서 주기적으로 변화하는 특징을 가지고 있다. 이 문제에서는 모든 날짜들이 7일 단위로 요일이 바뀐다. 그리고 그것이 이 문제와 관련된다.

따라서 예를 들면 초나 분과 같은 시간을 가지고 계산 문제를 만든다면 그것은 60초나 60분을 단위로 바뀌기 때문에 이것 역시 잉여류 문제가 될 것이다.

② 둘째로 문제와 관련된 모든 숫자들이 자연수이다. 날짜에 분수는 없다.(물론 관련된 숫자들이 음수라도 될 것이다.)

그 다음에 이 문제를 풀 수 있기 위해서 꼭 필요한 기본 지식이 있다. 그것은 각 달이 몇 일로 이루어져있는가 하는 것이다. 예를 들어서 1월은 31일, 2월은 28일, 3월은 30일… 등.(이걸 모르는 사람은 없겠지?)

이제 그 풀이를 보면…,

2526년 1월1일은 2525년 1월1일에서부터 365일이 추가되는 날이고 $365=7\times52+1$이다.

따라서 2526년 1월1일과 같은 요일은 2525년 1월1일을 기점으로 하여 날 수를 세어 이것을 7로 나눈 나머지가 1인 것이다.

3월 1일 : 30(1월) + 28(2월)+1 = 59 ⇒ $59=7\times8+3$

5월 1일 : 59 + 31(3월) + 30(4월) = 120 ⇒ $120=7\times17+1$

7월 1일 : 120 + 31(5월) + 30(6월) = 181 ⇒ $181=7\times25+6$

8월 1일 : 181 + 31(7월) = 212 ⇒ $212=7\times30+2$

……

이므로 2525년 5월이 2526년 1월의 달력과 동일하다. 따라서 답은 2번.

문제를 푸는 더 쉬운 방법

방금 본 문제 풀이가 복잡하게 여겨진다면 잉여류의 기본 개념을 이용해서 더 쉽게 문제를 풀 수 있다. 아니, 이것은 실은 잉여류의 기본 개념을 이용한다는 말 자체가 거창할 정도로 단순한 방법일 것이다.

각 달이 며칠인지를 알면 그것을 전부 7로 나누어 나머지를 적어보자. 그러면 다음과 같이 될 것이다.

1월	2월	3월	4월	5월	6월	7월	8월	9월	10월	11월	12월
3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3

이 때 학생들은 2525년이 윤년이 아니고, 그래서 2월이 28일까지만 있다는 것을 확인해야만 한다.

이제 생각해 보자.

실제로 문제를 풀 때 이 부분, 즉 생각해 보는 부분, 그래서 규칙을 찾아내는 부분은 학생 자신만이 할 수 있다. 이것이 문제해결 능력이다. 이 능력은 많은 문제를 풀어서 얻을 수 있는 것이 아니라 아무리 적은 수의 문제를 풀더라도 스스로 이러저리 생각을 해 보아야만 얻을 수 있는 능력이다.

2월1일과 3월1일은 요일이 꼭같다. 왜냐하면 2월이 28일이라서 2월1일이 월요일이면 2월28일은 일요일이 되어 정확하게 4주일의 날짜만이 2월에 있기 때문이다. 그래서 2월의 (7로 나눈) 나머지는 0이다.

그렇다면 2526년 1월1일과 같은 요일로 시작하는 달은, 어떻게 찾을 수 있을까? …잠시 생각해 보면 헷갈릴지도 모른다. 한번만 더 다른 생각을 해 보자.

1월부터 9월까지의 나머지들을 모두 합하면 3+0+3+2+3+2+3+3+2=21이 되어 7의 배수가 된다. 이것은 무엇을 뜻하는가? 각 달에서 4주씩이 반복되고 남은 날들을 모두 모아서 정확히 몇 수(이 경우 3주)를 만들 수 있다는 것을 의미한다. 따라서 1월 1일부터 9월 마지막 날까지의 날짜들을 모두 모으면 여러 주가 정확하게 반복되고 '다시 처음부터' 시작하게 된다. 즉 10월1일과 1월1일은 요일이 같다.

이 때, 10월1일과 요일이 같은 1월1일은 어떻게 찾는가? 10월 이전의 각 달(10월은 빼고)의 나머지들을 다 합해서 7의 배수가 되는 달, 그 첫 달(1월)을 찾으면 된다.

그렇다면 마찬가지로 생각해서 이제 2526년 1월을 제외한 이 전의 달들의 나머지들을 다 합해서 7의 배수가 되는 달을 찾아야 한다. 12월부터 나머지들을 하나하나 더해 보자. 그러면 5월까지의 나머지들을 모두 합했을 때 7의 배수가 된다. 따라서 답은 5월.

이와 꼭같은 생각이지만 나머지들만을 가지고 계산한 것이 아니라 각 달의 모든 날짜를 가지고 계산한 것이 위의 풀이법이다.

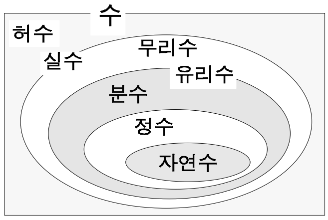
<어떻게 더 쉬운 풀이법을 생각해 내는가?>

더 쉬운 풀이법을 생각해 내는 방법은, 문제 전체의 얼개를 빨리 파악해내고(그러려면 느긋하게 문제를 바라볼 수 있어야 한다.) 목적에 필요한 내용만을 가지고 생각하는 것이다. 마치 가장 빠른 길을 찾으려면 전체적인 지형을 알고 장애물만 피하면서 목적지만을 바라보고 가는 것과 같다. 그러기 위해서는 느긋하게 문제를 바라볼 수 있어야 하고 또 느긋하게 문제를 볼 수 있기 위해서는 자신감이 있어야 한다. 자신감은 어떻게 생기는가? 열심히 공부해야만 생긴다.

지능은… 그 다음 문제이다.

또 어떤 수가 있는가? ...허수.

수 체계에 대한 설명을 시작할 때 본 적이 있는 옆의 그림을 기억하고 있는 학생이라면, 지금까지 우리가 설명한 것은 실수까지이고 아직 설명하지 않은 것이 하나 남아있다는 것을 쉽게 생각하게 된다. 그것이 허수이다.



허수(虛數)는 그 이름을 풀이해 볼 때 “비어있는 수”라는 뜻이다. 이에 반해서 실수(實數)는 “실제로 있는 수”라는 뜻이라고 할 수 있다. 한편 허수를 영어로는 “imaginary number”라고 하는데 이것은 “상상의 수”라는 뜻이다. 왜 이런 이름이 생겨났는지를 이해하는 것은 그리 어렵지 않다. 허수는 실제로 아무 크기도 갖지 않는, 단지 인간이 상상해 본 수일 뿐이기 때문이다. 그런데 왜 허수를 상상해 내게 되었는가? 그것은 수학적인 계산을 그대로 밀고 나가다 보면 실수 세계의 끝에 다다르고 아무 것도 디딜 수 없는 영역을 만나기 때문이다.

누구나 자기 집 안에서 충분히 살 수 있다. 하지만 자기 집에서 한 발짝만 내 딛어도 아무 것도 없는 낭떠러지라고 생각해 보자. 그럴 경우에 집 안에서 충분히 살 수 있음에도 불구하고 매우 불편할 것이다. 허수도 이와 같은 의도에서 만들어졌다고 보면 된다. 하지만 집 앞에 마당도 있고 문을 나서면 길이 있어서 이 모든 것이 집과 함께 점점 중요해지듯이 수학의 발달과 함께 허수도 중요해졌다.

실수 세계의 끝, 그래서 아무 것도 디딜 수 없는 영역은 어디에 있는가?

누구나 쉽게 $x^2=4$를 생각하듯이 $x^2=-4$도 생각할 수 있다. 그런데 이 때 -4의 제곱근이 되는 수, 거기에서 실수 세계의 끝이 나타난다.(그리고 적어도 지금까지는 거기서만 실수의 끝이 나타났다.) 어떤 실수를 제곱해도 음수는 나올 수 없는 것이다. 그래서 제곱해서 음수가 나오도록 하는 수를 상상해 본다. 그리고 그 수를 가지고 계속 끝까지 밀고 나가본다. 별로 모순이 생기지 않고 훨씬 간편한 일이 많이 생긴다. 그래서 허수가 수학에서 인정받게 된 것이다.

허수와 복소수의 모습

제곱해서 음수가 나올 수 있는 수, 거기에서만 실수의 끝이 나타난다. 그래서 허수는 그 부분을 채움으로써 시작한다.

모든 음수는 양수에 −1을 곱한 것으로 생각할 수 있다.(음의 정수가 생겨난 원리와 같다.) 그러므로 제곱해서 음수가 나오는 모든 수를 생각하기 위해서는 제곱해서 −1이 나오는 수만 하나 덧붙이면 된다.

그래서 허수 단위 i를 정의하게 되며, 그것은 다음과 같다.

$$i=\sqrt{-1}\ \ (i^2=-1)$$

모든 허수는 실수과 i의 곱으로 나타낼 수 있다. 예를 들어서 $\sqrt{-24}=\sqrt{24}\times\sqrt{-1}=\sqrt{24}i$ 로 나타내는 것이다.

그러면 실수가 아닌 것은 모두 허수일까? 가득찬 것(실수)가 아니면 반드시 빈 것(후수)인가? 반쯤 찬 것도

있을 수 있지 않을까? 모든 허수를 " $\sqrt{음수}$"의 형태로 생각하면 무언가 빠뜨리는 것이 있을 것 같다. 그것은 실수와 허수가 결합된 것이다. 실수와 허수가 결합해도 허수는 허수이다.

그렇다면 허수는 다음과 같은 형태로 항상 나타나게 된다. 즉,

$$a+bi \ (\ a,\quad b\neq 0\text{는 실수})$$

여기에서 a를 "실수부분"이라 하고 b(bi가 아님)를 "허수부분"이라고 한다. 그리고 만약 $a+bi$에서 b가 0이 되면 a만 남게 되어 실수가 될 것이다. 그렇다면 $b\neq 0$이라는 조건을 없애고 $a+bi$를 써서 실수와 허수를 모두 나타낼 수 있을 것이다. 그리고 실수와 허수를 포함한 전체를 "복소수"라고 한다. 이렇게 생각하면 실수는 복소수의 특수한 경우(허수부분이 0인 경우)가 된다.

이상의 내용을 집합의 기호로 정리하면 다음과 같다.

실수 전체의 집합을 R, 복소수 전체의 집합을 C라고 하면

$$R\subset C,\quad C=\{\ a+bi \ \mid a\in R, b\in R\}$$

복소수의 연산

숫자가 생겼으면 그것은 계산할 수 있어야만 숫자일 것이다.

그래서 이제 복소수를 계산할 수 있기 위한 절차를 준비한다. 그것은 계산방법의 정의이다. 이것은 단순하고 자연스럽다. 즉 실수를 계산하는 방법을 확장한 것이다. 하지만 학생들은 쉽게 이것을 받아들여 복소수를 계산할 수 있지만 그러기 위해서 수학자들은 복소수를 이런 식으로 계산해도 문제(즉 모순)가 생기지 않는지를 확인하기 위해서 많은 연구를 해야만 한다.

계산을 위한 첫째 조건은 더하기와 곱하기를 생각하는 것이 아니라 두 수가 같을 조건을 정의하는 것이다.

실컷 계산을 했는데 두 결과가 같은지 다른지를 알 수 없다면 굉장히 곤란한 일이 많을 것이다.

[1] 복소수가 같을 조건 : a, b, c, d가 실수일 때, $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$

그리고 실수의 중심(왜냐구? 느낌이 그러니까.)이라고 할 수 있는 0도 정의한다. 왜냐하면 사칙연산을 해 나가기 위해서는 나누기의 분모가 될 수 없는 수 0을 정확히 알아야 하기 때문이다. (그렇지 않으면 모순이 생길 것이다.) 또 더하기와 빼기에서도, 더하나 빼나 변함이 없는 수 0이 있는지 없는지, 있다면 어떤 수가 복소수에서 0인지를 알아야 한다. 곱하기에서 0은 모든 수를 한자리(0)으로 모으는 기능을 갖는다.

[2] 복소수가 0이 될 조건 : $a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$

[3] 켤레 복소수 : $z=a+bi \Leftrightarrow \overline{z}=a-bi$

왜 켤레 복소수를 생각할까? 그것은 켤레 복소수가 특별한 기능을 갖기 때문이다. 잠시 후에 다시 설명한다.

[4] 복소수의 덧셈·뺄셈 : 임의의 실수 a, b, c, d 에 대하여

$$(a+bi)+(c+di) \ = \ (a+c)+(b+d)i$$

$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

[5] 복소수의 곱셈 : 임의의 실수 a, b, c, d **에 대하여** $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

이것은 일반적인 식의 곱셈과 같이 생각하면 된다. 즉,

$(a+bi)(c+di) = a(c+di)+bi(c+di) = ac+adi+bci-bd = (ac-bd)+(ad+bc)i$

여기서 $i^2=-1$이기 때문에 $-bd$가 되었다.

[6] 복소수의 나눗셈 : 임의의 실수 a, b, c, d **에 대하여** $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ **(** $c, d\neq 0$**)**

<왜 켤레복소수를 생각하는가?>

켤레 복소수를 이해하는 가장 익숙한 방법은, 학생들이 이미 익숙해 있는 분모의 유리화와 같은 원리로 생각하는 것이다. $3-\sqrt{2}$가 분모에 들어있는 수를 유리화하기 위해서는 $3+\sqrt{2}$를 곱해주어야 한다. 마찬가지로 허수를 실수화하기 위해서는 켤레 복소수를 곱해주어야 한다. 유리화나 실수화나 모두 곱셈공식 $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$에 근거하고 있다.

컬레복소수는 실수세계를 기준으로 한 어떤 복소수의 역원이라고 할 만하다.

그래서 복소수의 나눗셈 공식을 이해하기 위해서는 꼭 켤레복소수를 생각해야만 한다.

복소수의 사칙 연산에 대한 공식들은 복소수 안에 흩어져 있는 i를 모두 한 곳으로 모아서 $a+bi$의 형태로 만든 결과에서 생겨난 것이다.

복소수의 기본적인 성격에서 중요한 것 한가지는 허수단위 i의 성격이다.

복소수가 실수가 아니라면 그것은 허수인데 허수가 허수인 까닭은 거기에 i가 곱해져 있기 때문이다. 따라서 i의 특징에 따라서 실수의 특징이 아닌 허수의 특징이 생긴다. 그러므로 i의 특징을 잘 이해하고 실수의 특징에 잘 결부시키기만 하면 복소수의 특징은 모두 파악할 수 있게 되는 것이다.

< i의 특징>

$i=\sqrt{-1}$의 특징은 그것을 제곱하면 -1이 된다는 것이다. 이것은 곧 i의 정의이기도 하다.

수학 개념의 모든 특징은 원래 정의에서 생겨난다.

i^2이 -1이라면 이것을 다시 제곱한 것은 -1을 제곱한 것이 되고 결국 1이 된다. 즉 $i^4=1$이다.

그래서 i는 거듭제곱됨에 따라서 다음과 같이 변화하며 4제곱을 단위로 이 변화는 반복된다.

$$i=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,\quad i^5=i,\quad i^6=-1,\quad i^7=-i,\quad i^8=1,\ \cdots$$

이러한 i의 변화를 이용하는 것이 98년 수능에 출제된 다음의 문제이다.

<문제12> $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1998}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① -1 ② 1 ③ $-i$ ④ i ⑤ 1998

이런 문제를 어려워하는 학생들은 잘 없겠지만 처음 복소수를 배우는 학생들에게 이 문제는 매우 어렵게 보

일 수 있다. 1998번이나 어떻게 거듭제곱을 하는가? 이렇게 몇 천번이나 반복 계산을 하는 것으로 나타난 문제에는 반드시 그 많은 반복계산을 간단히 처리할 수 있는 특정한 규칙성이 숨어있어서 그 규칙성을 찾아내고 적용하는 것이 문제해결의 관건이 된다.

이 문제의 경우에 일단 괄호 속의 복소수를 단순하게 정리해 볼 필요가 있다. 즉 분모를 실수화하는 것이다. 그러기 위해서 분자와 분모에 모두 분모의 켤레복소수인 $1+i$를 곱해주면 된다. 그러면,

$$\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1+1}=\frac{2i}{2}=i$$

가 된다. 즉 문제는 i^{1998}로 바뀌는 것이다. i는 4제곱될 때마다 1이 되므로 1998을 4로 나눈 나머지를 남기면 된다.(여기서는 잉여류 문제가 살짝 개입된다. 그런 것을 굳이 생각할 필요도 없겠지만.) 1998을 4로 나눈 나머지는 2이므로 $i^2=-1$이다. 따라서 답은 1이다.

<복소수 단원의 내용이 자꾸 틀리는 까닭>

만약 어떤 학생이 복소수 단원과 관련된 문제가 자꾸 틀린다면 그 까닭은 주로 복소수의 계산에 익숙하지 않아서 실수를 하기 때문이다. 그 해결책은 간단하다. 복소수 연산의 쉬운 문제들을 많이 풀어보면 된다. 틈틈이 지겨워하지 말고, 그리고 쉽다고 그만두지 말고 많이 풀어보자.