이제 앞에서 한 말을 번복해야한다.(반복이 아니다.--)

앞에서 “사칙연산은 숫자의 특성 속에 원래 포함되어 있는 것이라는 생각을 하기 쉽지만 사실은 그렇지가 않다.”라고 말했다. 이 말은 이제 다시 번복되어야 한다.

왜 수학에서는 수를 다루는가? 그것은 숫자가 무한히 많고 또한 그러면서도 그 안에 질서가 있기 때문이라고 했다. 수가 가진 질서의 핵심은 어느 것이 먼저이고 어느 것이 나중이라는 것, 혹은 다른 말로 하면 어느 것이 더 크고 어느 것이 더 작다는 것이다. 이 ‘질서’는 곧 서로의 ‘관계’이다. 이러한 수의 특성 때문에 수는 언제나 한 줄로 설 수 있다. 결코 새치기가 성립하지 않는다.

<<물론 이것은 실수에 대해서만 성립하지만 생각을 실수 안에 제한해서 계속 생각해 보자.<>

이러한 기본적인 질서를 토대로 사람들은 수의 질서들을 서로 압축하고 짜맞추어서 새로운 관계들을 만드는데 그 만드는 규칙이 (앞에서 본) 연산의 정의이다.

만약에 수 자체에 질서가 없다면, 그래서 내적인 관계가 확실하게 성립되어 있지 않다면 사친연산과 같은 연산이라는 것은 있을 수 없다. 쓰레기 통 속의 어지러운(질서 없는) 물건들을 다 꺼내어서 연산의 정의처럼 간단하게 그 집합 안에 닫혀있는 규칙을 설정한다고 사칙연산과 같은 계산이 성립할까? 아무래도 힘들 것이다.

따라서 사칙연산이라는 그러한 규칙, 거듭제곱이나 혹은 지금까지 각종 문제들을 통해서 보았던 ∘나 ○의 기호로 정의되었던 다른 규칙이 아닌 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기의 규칙은 인간이 원해서 기본적인 규칙으로서 만들었기 때문에 인간이 만든 것이다. 하지만 수 자체에 원래의 근본적인 질서가 없으면 그러한 사칙연산을 만들 수가 없다. 그리고 다른 어떤 연산도 쉽게 만들 수 없다. 따라서 사칙연산의 반은 수 안에 원래 들어있는 것이다. 사칙연산의 반쯤은 수에 원래 들어있는 것이다.

이렇게 비유해 보자. 원래 수 안에 들어있는 근본적인 질서(관계)가 씨앗이라면 거기에 인간이 물과 비료를 주어서 사칙연산이라는 나무가 생겨났다. 그러면 이 사칙연산이라는 나무는 인간이 만든 것인가, 아니면 원래 씨앗 안에 있던 것인가?

수학의 강력한 계산규칙과 복잡한 공식들은 집합과 명제에서 배운 논리의 틀과 수 안에 들어있는 이러한 독특한 질서(관계)가 결합되어서 나타난다. 수의 독특한 질서를 버리고 논리의 틀 속에 수가 아닌 우리의 생각만을 담은 것이 일반적인 논리학이다.

연산의 밑에 있는 것=수학의 밑에 있는 것 : 함수

처음에 우리는 이상연산에 대해서 설명하기 전에 실수체계의 내용이 ‘함수’와 가장 관련 깊다는 이야기를 하였다. 그 때는 그 말을 금방 이해할 수 없었다고 하더라도 이항연산을 여기에서 방금 설명한 것과 같이 이해하면 이제 함수와의 연관성을 짐작할 수 있게 된다. 사칙연산을 추상화해서 이항연산에

대한 정의를 내리고 보면 그것은 곧 함수이기 때문이다.

2항연산이 가능하다면 3항연산도 가능하고 4항연산도 가능하며, 동시에 1항연산도 가능하다. 이러한 연산들의 공통점은 무엇인가? 그 추상화의 결과가 함수이다.

이항연산은 (a,b)라는 순서쌍에 c를 대응시키는 것이다. 그런데 이 (a,b)는 a와 b로 만들어진 것, 즉 두개로 이루어진 어떤 것 ‘하나’이다. 그래서 (b,a)와 다르다. 어떤 것에 어떤 값을 하나씩 대응시키는 것, 그것이 함수라는 것을 학생들은 중학교 때부터 배웠을 것이다.

<<왜 하필 2항연산인가?>>

그러면 왜 하필 3항 연산이나 4항연산, 혹은 1항연산이 아닌 2항연산을 배울까? 어떤 점에서 다른 함수들보다 중요하기 때문이 아닐까? 왜 하필 2항연산이 중요할까?

그것은 2항연산이 가장 간단하면서 동시에 풍부하기 때문이다.

3항연산, 4항연산은 굉장히 복잡하다. 3항연산에 대해서 교환법칙을 생각한다고 해 보자. (a,b,c)에 대응되는 값이 (c,b,a)에 대응되는 값과 같은지를 따져야 할까 아니면 (b,a,c)와 같은가를 따져야 할까 혹은 (c,a,b)의 값과 같은지를 따져야 할까? 그 뿐인가? (a,c,b)도 있고 (b,c,a)도 있다. 이항연산에서는 (a,b)와 (b,a)에 대응되는 값 2개가 서로 같은지만 따지면 되었는데 3항연산에서는 3개가 아닌 6개의 값이 같은지 다른지를 따져야 한다. 그리고 또 따졌을 때 그 값들 중 3개는 항상 같고 나머지는 서로 다르면 교환법칙이 성립한다고 해야할까, 아니면 성립하지 않는다고 해야할까? …이 생각 자체가 벌써 머리 아프지 않는가?

2항연산이 간단하다면 1항연산은 더 간단할 것이라고 생각할 수 있다.

하지만 2항연산은 동시에 풍부하다. 아무리 많은 숫자가 있어도 두개씩 연산을 적용해서 계산하면 전체를 다 계산한 값이 나온다. 예를 들어 1부터 1000까지의 숫자가 있다고 하더라도 1에다 2를 더해서 3을 만들고 다시 그 값 3에다 세번째 숫자인 3을 더해서 6을 만들고 다시 거기에 4를 더해서 10을 만들고… 이렇게. 하지만 1항연산은 그렇지 못하다. 1,2,3 이 세 원소들을 결합시킬 수 없다.

간단하면서도 풍부한 것, 그것이 수학의 기술이라고 명제를 끝내면서 설명하였다.

<대학교에서 배우는 이항연산의 정의>

해석학이라는 분야에서는 이항연산을 다음과 같이 정의한다. 즉,

“집합 S에 대하여, 함수

$$\alpha : S \times S \to S$$

를 S 위의 이항연산, 또는 간단히 S 위의 연산이라고 한다.“

여기서 ‘ $S \times S$라는 것은 집합 S에서 원소 하나, 또 집합 S에서 원소 하나, 즉 두 개를 취해서 순서쌍을 만든다는 것을 의미한다. 즉 S의 원소 a와 b를 취해서 (a,b)를 만든다는 의미이다. 이 정의에서는 이항연산이 집합 S에 닫혀있다는 것이 이렇게 표현되어 있다. 그리고 그것이 함수라고 분명하게 말하고 있다.

그러면 일단 이렇게 대략 정리해 볼 수 있다.

모든 수학의 내용은 계산하는 것을 내용으로 한다. 숫자도 그렇고 명제도 그렇고 집합도 그렇다.(명제에서는 논리합과 곱이 계산에 해당되고 집합에서는 합집합과 교집합이 모두 계산의 일종이다.) 계산한다는 것은 연산으로 정의되므로 알고 보면 모두 함수이다. 그러므로 모든 수학은 함수로 구성된다.

함수는 수학의 어디에나 밑바닥에 깔려있는 받침돌이다. 그렇기 때문에 함수는 기초이면서 수학에서 중요한 내용이다.

더 자세한 내용은 교과과정의 순서에 따라서 다시 함수에 대해서 설명할 때 하기로 하겠다.

중심을 찍는다 : 항등원과 역원

다음으로 넘어가면 항등원과 역원의 문제가 나타난다.

나는 처음에 학생들이 이 문제를 어려워하지는 않을 것이라고 예상했지만 뜻밖에 항등원과 역원 문제를 어려워하는 학생들이 많았다. 그리고 그 이유를 알아 본 즉, 이항연산 자체에 대한 이해가 부족한 것이 중요한 원인이었다. 이 글을 읽는 학생들은 지금까지 이항연산에 대한 설명들을 충분히 읽었을 것이므로 나머지 설명을 통해서 비교적 쉽게 항등원과 역원의 문제를 이해할 수 있을 것이다.

항등원과 역원의 문제는, 비유를 하자면 숫자들의 집합이라는 큰 땅에 어떤 이항연산이라는 나라를 건설할 때 서울을 정하기 위해서 중심을 찍는 것과 비슷하다.

나라를 건설하기 위해서는 큰 땅에 도시와 마을을 건설하고 길을 뚫어 연결해야 한다. 수들이 도시와 마을이라면 그것들의 관계를 설정하는 이항연산은 길이다.

앞에서도 얘기했지만 연산에는 특성들이 있다. 연산의 특성들이 수집합의 숫자들이 어떤 역할을 하는가 하는 것을 결정한다. 큰 대륙 속에 들어서면 어디나 땅이 있고 크고 작은 산이 있는 것은 꼭 같지만 하나의 나라가 이루어지고 국경선과 도시가 정해지면 여기저기의 땅들이 서로 다른 역할을 하고 다른 가치를 지니는 것과 꼭 같다.

연산에 의해서 결정되는 수집합의 중심이 되는 수, 그것이 항등원이다.

항등원과 역원을 좀더 쉽게 이해하기 위해서는 '항등원'이라는 말과 '역원'이라는 말의 글자뜻을 짚어보면 도움이 된다. '항등원'이라는 말은 항상(항) 같게(등)하는 원소(원)라는 뜻이다. 한편 '역원'이라는 말은 거꾸로(역) 만드는 원소(원)라는 뜻이다.

이해하기 쉽게 설명하기 위해서 먼저 역원을 한번 생각해 보자. 거꾸로라는 것은 어떤 뜻인가? 거꾸로라는 것은 반대방향이라는 뜻이다.

반대를 말할 때는 항상 기준이 있다. 내가 대전에 있으면 서울을 기준으로 반대방향이 북한 어느 지역이 되겠지만 부산을 기준으로 하면 일본 땅 어느 지역이 될 것이다. 그러면 수집합에서, 또는 연산에서의 거꾸로라는 것은 어디를 기준으로 삼을 것인가? 그 기준을 항등원으로 삼는다.

항등원은 새로운 기준이나 조건을 필요로 하지 않을까? 그럴 필요는 없다. 왜냐하면 항등원이란 자기와 같은 것이므로 항상 자신을 기준으로 하면 되기 때문이다.

말이 상당히 꼬이고 어지럽게 된 것 같은데 실례를 통해서 생각하면 그렇게 복잡한 것이 아니다.

덧셈을 예로 들어보자. 3의 역원은 무엇일까? 반사적으로 -3이 생각나겠지만 일단 모른체 하자. (수학은 외우는 학문이 아니다. 왜 그런지 따져서 알지 못하면 외운 답이라고 생각해야 한다.) 3의 반대 방향에는 어떤 수가 있을까? 0을 기준으로 하면 -3일 것이고 1을 기준으로 하면 -1일 것이다. 덧셈이니까 0을 기준으로 하겠지. 하지만 왜 0을 기준으로 해야만 하는가? 100이나 9같은 수는 왜 기준이 안될까?

이런 식으로 생각하면 역원을 찾기 위해서 반드시 그 '거꾸로'의 기준이 되는 것, 즉 '항등원'을 찾아야 한다는 것을 쉽게 이해할 수 있다.

항등원이란 항상 같게 되는 것, 즉 (어떤 연산에 대해서) 자기 자신이 그대로 나오도록 하는 숫자를 가리킨다. $3+0 = 3$으로 3과 0을 더하면 3이 그대로 나온다. 하지만 $3+1 = 4$로서 3과 1을 더하면 3이 그

대로 나오지 않는다. 즉 항상 같게 되지는 않는다. 그래서 0을 항등원이라고 한다. 그리고 이 항등원을 기준으로 삼아서 역원을 구한다.

항등원을 구할 때 3과 3이 같다는 것은 연산의 대상이 되는 3과 답이 되는 3이 같다는 뜻이었다. 여기서 답이 되는 3이 기준이다. 그러므로 역원을 구할 때 항등원을 어디에 놓는가 하면, 바로 역시 같은 기준의 자리, 즉 답의 자리에 놓는다. 그래서 3의 덧셈에 대한 역원을 구할 때는 기준인 0을 계산 안에 놓아서 3+0 = x라고 놓고 x를 구하는 것이 아니라 3+x = 0이라고 해서 기준인 항등원 0을 답의 자리에 놓고 x를 구해서 3의 역원을 찾는 것이다.

이제 미뤄두었던 <문제3>을 다시 생각해 보자.

<문제3>실수의 집합 R에 대하여 연산 ∘를 다음과 같이 정의한다.

$$a \circ b = a + b + ab$$

① 연산 ∘에 대한 교환법칙, 결합 법칙, 분배법칙이 성립하는가?
② 연산 ∘에 대한 항등원이 있으면 구하라.
③ 연산 ∘에 대한 5의 역원이 있으면 구하라.

항등원과 역원의 관계를 이해하고 나면 <문제3>에서는 항등원을 구하라는 ②번 문제가 없다 하더라도 역원을 구하라는 ③번 문제가 있으면 어쩔 수 없이 항등원을 찾아서 ③번 문제를 풀어야 한다는 것을 쉽게 이해할 수 있다.

<<그러므로 시험 문제는, 웬만해서는 항등원과 역원을 구하는 문제 중에서 역원을 구하라는 문제가 더 많이 나올 것이라고 추측할 수 있다.>>

그럼 일단 문제를 풀어보자. 연산 ∘의 항등원은 무엇인가? 문제를 풀어나가는 방식은 시키는 대로, 정해진 대로, 약속한 대로 그대로 따라나가는 것이다. (그대로 따랐는데도 아무런 결과가 안나오면 그것, 즉 "아무런 결과가 나오지 않는다"가 정답이 된다. ①에서 분배법칙이 정의되지 않는다는 것처럼.)

<문제3>의 ②와 ③을 푸는 요령은 다음과 같다.

② 항등원 : $a \circ x = a$ (여기서 a를 항상 a이게끔 하는 x를 구해야 한다.)

$a \circ x = a + x + ax = a$

$a + x + ax = a$ (여기서 양변의 a를 지운다.)

$x + ax = 0$ (여기서 좌변을 x로 묶어 내면: 왜냐하면 x를 구해야 하니까.)

$x(1+a) = 0$ (이 등식이 항상 성립하려면 x가 0이 되면 된다. 왜냐하면 모든 수는 0을 곱하면 0이 되니까.)

$x = 0$

<<또 한 가지 때때로 학생들이 실수하는 것, 여기에서 'a'가 −1이라고 먼저 생각하는 학생들이 있다. …여기서 구하고자 하는 것은 a의 값이 아니라 x의 값이다. 남학생을 따라가야 하는데 갑자기 예쁜 여학생이 지나간다고 그 여학생을 따라가면 안된다.>>

이것을 확인해 보면,

$$5\circ 0 = 5+0+5\times 0 = 5+0+0 = 5$$

<<이상의 풀이 방법에서 왜 갑자기 방정식의 풀이방법을 쓰게 되는 것일까? 그 전체를 곰곰히 생각해 보면, 처음에는 항등원의 정의대로 a∘x = a를 쓰고 나서 그 다음부터는 그것을 풀어서 방정식으로 풀었다. 처음에 a∘x = a를 쓴 이유가 방정식으로 풀어서 해결하는 방법을 선택하기 때문이다.

앞에서 교환법칙과 결합법칙이 성립하는지를 따질 때 2단계로 나누어서 했던 것을 기억하는가? 여기에서도 똑같이 한다. 약속(정의)을 따라서 익숙한 사칙연산으로 안전하게 들어 온 후에 그 다음에는 '홈 그라운드'의 잇점을 이용하는 것이다.(갑자기 외래어를 쓰니 기분이 별로 안좋군!) 방정식은 사칙연산의 응용일 뿐이다.>>

③ 역원 : $5\circ x=0$ (여기에서 기준이 되는 답의 자리에 0이 들어갔다. 0이 항등원이기 때문이다.)

$5\circ x=5+x+5x=0$

$5+x+5x=0$ (방정식이다. 여기서 x를 구하면 된다. 방정식을 풀면 x가 구해진다.)

$5+6x=0$

$6x=-5$

$x=-\dfrac{5}{6}$

이 답을 확인해 보면, $5\circ -\dfrac{5}{6}=5-\dfrac{5}{6}-\dfrac{25}{6}=5-\dfrac{30}{6}=5-5=0$이 나온다.

(이것이 당연하게 느껴져야만 한다.)

여기서 한가지 주의해서 짚고 넘어가야 할 점은 항등원과 역원은 교환법칙이 성립하는 연산에 대해서만 적용된다는 것이다.

곰곰이 생각해 보면 그 이유를 알 수 있다. 항등원은 계산되는 값과 답으로 나오는 값이 같게 만드는 숫자라고 이해를 했는데, 이 때 항등원의 위치가 앞인지 뒤인지 구분이 없다. 이 말은 곧 앞이든 뒤이든 모두 성립해야 한다는 말이다. 즉 3∘0 도 3이어야 하고 0∘3도 3이어야지만 0이 항등원이 될 수 있다.

그냥 평범하게 생각해도 이것은 이해가 될 것이다. 어, 0이 항등원인데 왜 항등원을 앞에 두면 다른 값이 나오지?- 이렇게 되면 항등원이 항등원이 아니게 될테니까.

이상의 내용을 정리하면 다음과 같다.

집합 M이 연산 ○에 관하여 교환법칙이 성립할 때,

-항등원 : 임의의 a에 대하여 a○e=a를 만족하는 e(e∈M)

-역원 : 어떤 a에 대하여 a○x=e를 만족하는 x(x∈ M)

비슷한 문제 풀이

<문제5> 집합 $A=\{a+b\sqrt{3} \mid a,b$ 는 유리수$\}$의 임의의 원소들에 대해서 사칙 연산 중 어떤 연산이 대해 닫혀 있는가?

$x=p+q\sqrt{3}$, $y=r+s\sqrt{3}$이라고 하자. (이것은 문제에서 주어진 것을 그대로 적용한 것이다. 따라서 틀림없다.) 여기에 더하기를 적용하면 될까? 일단 해 보자.

<<이 단계에서 a,b가 유리수라는 조건을 붙여서 $x=\frac{p_1}{p_2}+\frac{q_1}{q_2}\sqrt{3}$, $y=\frac{r_1}{r_2}+\frac{s_1}{s_2}\sqrt{3}$로 놓을 수도 있다. 하지만 이러한 출발점 설정은 불필요하다. 왜냐하면 이 풀이의 마지막 부분을 추측해 보면 알 수 있다.>>

$x+y$를 계산하면,

$$=p+q\sqrt{3}+r+s\sqrt{3}=(p+r)+(q+s)\sqrt{3}$$

여기에서 유리수는 더하기에 대하여 닫혀 있으니까(즉 유리수끼리 더해도 유리수이므로) $p+r$도 유리수이고 $q+s$도 유리수이다. 따라서 $(p+r)+(q+s)\sqrt{3}$도 유리수이다. 그러므로 집합 A는 덧셈에 대하여 닫혀있다.

<<여기까지 머리 속으로 대략 생각해 보고 나서 처음에 $x=p+q\sqrt{3}$, $y=r+s\sqrt{3}$이라고 설정하는 것으로 충분하고 $x=\frac{p_1}{p_2}+\frac{q_1}{q_2}\sqrt{3}$, $y=\frac{r_1}{r_2}+\frac{s_1}{s_2}\sqrt{3}$로 복잡하게 설정할 필요가 없음을 알 수 있다. 그 다음에 정확하게 증명(혹은 계산)을 해 본다. 만약 정확하게 계산해 보니까 생각과 달리 $x=p+q\sqrt{3}$, $y=r+s\sqrt{3}$이라는 공식으로 충분하지 않다고 판단되면 다시 이렇게 설정해서 시작하면 된다. 무조건 모든 조건(유리수는 '$\frac{p}{q}$'의 꼴로 나타나고 q는 0이 아니다)을 식에 반영하여 복잡한 형태로 시작해도 되지만 그것은 괜히 문제를 어렵게 만들고 시간만 낭비할 가능성이 크다.>>

마찬가지로 뺄셈에 대하여 생각해 보면

$$x-y=(p+q\sqrt{3})-(r+s\sqrt{3})=(p-r)+(q-s)\sqrt{3}$$

여기서 유리수는 빼기에 대하여 닫혀 있으니까(즉 유리수끼리 빼도 유리수이므로) $p-r$도 유리수이고 $q-s$도 유리수이다. 따라서 $(p-r)+(q-s)\sqrt{3}$도 유리수이다. 그러므로 집합 A는 뺄셈에 대하여 닫혀있다.

이젠 곱셈에 대하여 생각해 보자.

$$xy=(p+q\sqrt{3})(r+s\sqrt{3})=pr+ps\sqrt{3}+qr\sqrt{3}+3qs=(pr+3qs)+(ps+qr)\sqrt{3}$$

유리수끼리 곱해도 유리수가 나오고 유리수는 덧셈에 대해 닫혀있으므로 $pr+3qs$도 유리수이고 $ps+qr$도 유리수이다. 따라서 $(pr+3qs)+(ps+qr)\sqrt{3}$은 A의 원소이고 집합 A는 곱셈에 대하여 닫혀있다.

나눗셈은 어떤가?

$$\frac{x}{y}=\frac{p+q\sqrt{3}}{r+s\sqrt{3}}=\frac{(p+q\sqrt{3})(r-s\sqrt{3})}{(r+s\sqrt{3})(r-s\sqrt{3})}=\frac{(p+q\sqrt{3})(r-s\sqrt{3})}{r^2-3s^2}$$

(↑분모를 유리화하기 위해 분자와 분모에 $r-s\sqrt{3}$을 곱하였다.)

$$=\frac{pr-ps\sqrt{3}+qr\sqrt{3}-3qs}{r^2-3s^2}=\frac{pr-3qs}{r^2-3s^2}+\frac{qr-ps}{r^2-3s^2}\sqrt{3}$$

여기서 유리수는 곱셈과 뺄셈, 나눗셈에 대하여 닫혀있으므로 집합 A도 나눗셈에 닫혀있다…라고 말할 수 있겠지만 한가지 조건을 붙여야만 한다. 왜냐하면 0도 유리수인데 어떤 수를 0으로 나누면 안되기 때문이다.(왜 그럴까? 그 이유는 잠시 후에 설명한다.) 위의 식에서 분모는 0이 되면 안된다.

분모인 $y=r+s\sqrt{3}$나 r^2-3s^2가 0이 되기 위해서는 r과 s가 유리수인 경우에 둘 다 0이 되는 수밖에 없다. 따라서 r과 s가 모두 0이 아니라는 조건이 덧붙어야 하는데 이것은 곧 분모인 y가 0이 아니라는 조건일 뿐이다.

<가끔씩 생기는 일>

학생들이 문제를 풀다 보면 가끔씩 문제 처음에 나온 조건을 잊어버리는 일이 생긴다. 예를 들어 이 문제에서는 r과 s가 유리수라는 조건과 같은 것을 잊는 것이다. 만약 그런 일이 생긴다면 학생들은 다음과 같이 생각하고 헛수고를 할 것이다.

"분모가 0이면 안되므로 위 식에서 $r^2-3s^2\neq0$이어야 하고 $(r+s\sqrt{3})(r-s\sqrt{3})\neq0$이어야 하며, $r+s\sqrt{3}\neq0$이어야 한다. 그러기 위해서는 $r\neq\pm\sqrt{3}r$이어야 한다. 그런데 생각해 보자. 왜 $r-s\sqrt{3}\neq0$이어야 하는가? 분모를 유리화하기 위하여 분자에 $r-s\sqrt{3}$을 곱해 주었기 때문에 이 조건이 붙게 되었다. 그렇다면 $r+s\sqrt{3}\neq0$이어서 애초에 분모가 0이 아니라면 $r-s\sqrt{3}$를 곱해줄 필요가 없고, 따라서 $r\neq-s\sqrt{3}$이기만 하면 충분하다. 그런데… 그럴 경우에 분모와 분자에 $r-s\sqrt{3}=0$을 곱해서 문제를 풀었으니까, $\frac{0}{0}$을 곱해서 문제를 푼 셈이잖아. 이래도 되는건가?"

이쯤 되면 다시 문제를 보게 되고, 그래서 r과 s가 유리수이어야 한다는 것을 확인하지 않을까?

모순을 예방한다

왜 나누기에서는 0으로 나누면 안될까?

3을 0으로 나누면 $\frac{3}{0}$, 5를 0으로 나누면 $\frac{5}{0}$으로 나타내면 안될까? 그리고 $\frac{3}{0}$과 $\frac{5}{0}$과 같은 수를 무한히 큰 수, 즉 ∞로 나타내면 되지 않을까? 극한과 미분적분을 배운 학생들은 잘 알겠지만 어차피 '∞' 기호는 극한을 다룰 때 사용하지 않는가? 만약 이렇게 무한대(∞) 기호를 사용한다면 항상 "분모는 0이 아니다"라는 조건을 매번 붙이는 귀찮은 수고를 줄일 수 있지 않을까?

하지만 그럴 수 없는 분명한 이유가 있다. 그것은 바로 수학에 모순이 생기지 않도록 하기 위함이다.

우리는 제일 처음에 수학에서는 결코 모순이 있어서는 안된다는 것을 확인하였다. 그것이 수학의 기초 개념들을 잘 알아야 하는 까닭이라는 것도 강조하였다. 어떤 수를 0으로 나누어서는 안되는 것도 바로 이 모순이 생기지 않도록 하기 위함이다.

0으로 어떤 수를 나누면 모순이 생긴다는 것을 간단하게 예를 들어 보자.

$a=1$일 때, a^2-1을 $a-1$로 나누는 경우를 생각해 보자. 이것을 숫자로 생각해 보면

$(a^2-1) \div (a-1)$이란 $\frac{0}{0}$이 된다. $\frac{0}{0}$의 크기는 얼마일까? 0쯤 되지 않을까? 그런데 $\frac{a^2-1}{a-1}$을 계산해 보면,

$$\frac{a^2-1}{a-1} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)} = a+1$$

그런데 $a=1$이라 하였으므로 $a+1=2$, 따라서 $\frac{a^2-1}{a-1}=2$이고, 결국 $\frac{0}{0}=2$이 된다. 아무래도 다소 엉터리인 것 같이 '느껴질' 것이다. 하지만 이것이 전부가 아니다.

$b=2$일 때 $\frac{b^2-4}{b-2}$의 값은 어떻게 되는가? $b-2$를 약분하면 $\frac{b^2-4}{b-2}=b+2=4$가 되지만 약분을 하지 않으면 $\frac{0}{0}$이 된다. 즉 $\frac{0}{0}=4$.

그렇다면 $\frac{0}{0}$은 2도 되고 4도 된다는 말이지 않는가? 즉 $2=\frac{0}{0}=4$. 이 정도만 되어도 문제이지만 이렇게 계속하면 모든 숫자가 서로 같아질 수 있다. 이래서는 수학이 엉망진창이 될 것이다.

모순이 생기지 않기 위해서는 0으로 나누어서는 안된다는 조건을 항상 붙일 수밖에 없다.