닫혀있음

<문제2> 다음 수집합들은 사칙연산들 중 어떤 연산에 대해서 닫혀 있는가?

① 자연수의 집합

② { $2n+1$ | $n\in$정수}

③ {-1, 1}

이 문제에서 ①자연수의 집합은 덧셈과 곱셈에 대해서만 닫혀 있다는 것을 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

②번은 쉽게 말해서 {…-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9…}를 나타낸다.

즉 정수들 중에서 홀수같은 것만 모은 것이다. 이 집합은 곱셈에 대해서만 닫혀 있다. 왜냐하면 모든 홀수는 서로 곱하면 홀수가 나오지만(7×9=63) 더하면 짝수가 나오기 때문이다(7+5+12). 홀수에서 홀수를 빼도 짝수가 나온다.(5-3=2, 17-9=8) 나누기를 하면 정수가 아닌 분수가 나올 것이다($17\div5=\frac{17}{5}$).

이것을 수학적으로 증명하면 (2)에서 주어진 식 '$2n+1$'을 가지고 시작해야 한다. 즉,

곱셈 : $(2m+1)\times(2l+1)=(4ml+2m+2l+1)$

$=2(2ml+m+l)+1$ $\quad(4ml+2m+2l=2(2ml+m+l))$

$=2M+1$ $\quad$(이 때, $M=2ml+m+l$)

덧셈 : $(2m+1)+(2l+1)=2(m+l)+2=2(m+l+1)$

뺄셈 : $(2m+1)-(2l+1)=2(m-l)$

나눗셈 : 생략

여기서 곱셈의 답만이 2n+1의 형식으로 나타난다. 그래서 곱셈만이 (2)의 수집합에 대해서 닫혀 있게 된다.

<뻔한 설명?>

3×5=15라는 것만 봐도 홀수끼리 곱하면 홀수가 나온다는 것을 알 수 있고 5+7=12라는 것만 봐도 홀수끼리 더하면 짝수가 나온다는 것을 알 수 있는데 왜 복잡하게 이렇게 증명을 할까? 27÷9=3이라고 홀수를 홀수로 나누면 홀수가 나온다고 할 수 있을까? 그럴 수는 없다. 5÷3의 값은 홀수가 아니기 때문이다. 어떻게 운수가 좋아서 우리는 홀수로 홀수를 나눈 값이 홀수인 것을 찾았을지는 모르지만 항상 그런 것인지는 그것만으로 알 수 없기 때문이다. 그렇기 때문에 항상 그러한지를 알기 위해서 위와 같이 증명을 하는 것이다.

가끔씩 학생들이 실수를 하는 경우는 ③이다.

③과 같은 수집합은 사칙연산 중 어느 것에 대해서도 닫혀 있지 않을 것 같이 생각하기 쉽다. 왜냐하면 원소의 개수가 두개밖에 없는 유한집합이기 때문이다. 덧셈과 뺄셈에 대해서도 당연히 닫혀 있지 않다. 그러므로 곱셈과 나눗셈에 대해서도 닫혀 있지 않을 것이다…라고 생각하면 틀린다. 왜냐하면 1×1 = 1이고 -1×-1 = 1, -1×1 = -1, 1×-1 = -1이기 때문이다. 두 숫자들을 곱해서 다른 수가 안나온다. 나누기도 마찬가지이다.

그래서 ③의 수집합은 곱셈과 나눗셈에 대해서 닫혀 있는 집합이다.

<<수학에서는 선입견을 조심해야 한다. 두 수를 곱하면 곱할수록 계속 커진다는 것, 그래서 곱셈에 대해서 닫혀 있는 수집합은 항상 무한히 많은 수를 포함하고 있는 무한집합이어야 한다는 것이 이 문제를 틀리게 할 수 있는 선입견이다.>>

교과서나 참고서에서는 이 닫혀 있음의 성질과 교관법칙, 결합법칙, 분배법칙과 같은 연산의 기본법칙 등을 설명할 때 사칙연산을 중심으로 설명하지만 그것은 이해하기 쉽게 하기 위한 것일 뿐이다. 원칙적으로는 이 모든 것을 이항연산에 대해서 따질 수 있다. 우리는 나중에 다시 이러한 성질들에 대해서 생각해 보게 될 것이다. 특히 함수를 배우면서.

추상화를 통해서 얻을 수 있는 것

그런데, 왜 괜히 어렵게 연산이라는 것, 즉 '이항연산'을 추상화해서 정의할까? 사칙연산만 알면 되지 않을까?

그 까닭은 추상화를 통해서 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기의 공통점을 뽑아내어서 생각하기 쉽도록 만들기 위해서이다.

추상화란 무엇인가? 장미, 백합, 튤립, 민들레… 등이 있다면 그것들에 대해서 이야기를 할 때 매번 "장미, 백합, 튤립, 민들레…"하고 말을 할 수는 없다. 빨간 꽃잎과 가시가 있는 꽃에 대해서만 이야기할 때는 장미만 언급하면 되겠지만 예쁜 모양을 하고 있고 잎과 줄기가 있고 꽃씨를 만들고 등등에 대해서 이야기할 때는 모두에게 포함되는 이야기이기 때문에 이 전체를 같이 지칭해야만 한다. 이 때 우리는 이것들을 모두 가리켜서 "꽃"이라고 한다.

이것이 추상화이다. 즉 하나하나가 가지고 있는 공통된 특성들을 모두 뽑아서 성질들을 모아 놓고 생각하는 것.

연산도 마찬가지이다.

더하기와 빼기는 어떤 공통점을 가질까?

자연수를 더하기하면 숫자가 커지고 빼기를 하면 숫자가 작아진다. 숫자가 커진다는 점에서는 더하기와 곱하기가 비슷해 보이지만 1보다 작은 수를 곱하면 곱하기는 오히려 빼기처럼 숫자가 작아진다. 그럼 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기의 공통점은 하나도 없는 것일까? 아니다.

공통점들이 있는데 그것은 곧 그것들이 '이항연산이라는 것'이고 그 공통점의 내용은 '두 수에 대해서 하나의 수를 대응시키는 함수'라는 것이다.

'두 수'에 대한 '연산'이기 때문에 2항 연산, 즉 '이항연산'(二項演算)이라고 한다. 만약에 (1,2,3)과 같은 3개의 수에 대해서, 즉 3개의 항에 대해서 계산규칙을 정의하면 '3개의 항'이니까 '3항'에 대한 연산, 즉 '삼항연산'이 될 것이다. 그렇게 4항현산, 5항연산 등을 정의할 수 있다.

이렇게 해서 우리는 연산을 추상화함으로써 지금까지 잘 알던 사칙연산을 넘어서서 새로운 연산들까지도 생각할 수 있게 된다. 왜냐하면 어떤 식물을 처음 보더라도 예쁜 꽃망울이 있고 잎과 줄기, 그리고 꽃씨가 생기고… 등의 특징을 가지면 모두 꽃이라는 것을 알 수 있듯이 연산의 정의대로 같은 집합에 속하는 두 수에 대해서 역시 같은 집합의 한 수를 대응시키는 것은 모두 조건을 갖춘 연산이라고 할

수 있기 때문이다.

그래서 학생들은 이항연산의 단원에서 지금까지 본 적이 없는 전혀 엉뚱한 계산법, 그래서 도대체 필요가 없어 보이는 연산들을 기호 '∘' 등으로 약속해서(달리 말하면, 정의해서) 사용하게 된다. 그리고 때로는 필요한 연산들을 정의해서 새로 만들기도 하는 것이다.

새로운 것들과 상상할 수 있는 것들

이상과 같은 것을 이해할 때 우리는 다음의 문제를 왜 풀어보아야 하는지, 또 문제를 통해서 무엇을 생각하고 배워야 하는지를 알 수 있다.

<문제3>두 실수 a,b에 대하여 연산 a∘b, a◯b를 각각

$$a \circ b = a + b - ab, \quad a \bigcirc b = 3(a+b)$$

와 같이 정의할 때 다음 각 값을 구하여라.

① 2∘5 ② (3◯4)∘2

이 문제를 푸는 것은 어렵지 않다. 하지만 대부분의 학생들은 왜 이런 (쉬운) 문제를 수학에서 공부할까, 하는 것을 이해하지 못하고 또 생각해 보지도 않는다. 그래서 조금 후에 제시할 역시 쉽고 간단한 문제를 금방 어려워하게 된다. 일단 이 문제에 대해서 먼저 설명을 하면, 이 문제의 답은,

① 2∘5 = 2+5-2×5 = 7-10 = -3

② (3◯4) = 3(3+4) = 21이므로

(3◯4)∘2 = 21+2-42 = 23-42 = -19

이다. 풀이의 전체는 각각의 기호 '∘'와 '◯'의 약속된 계산방식을 그대로 따르기만 하면 완성된다.

(수학의 학문적 특성이 처음에 했던 말을 끝까지 고집하는 고집불통의 성격이라는 것을 기억하자.)

이 문제를 풀면서 학생들은 평소에 **"왜 이렇게 쓸데없고 복잡한 계산을 괜히 만들어서 계산을 할까?"** 하고 생각을 했을 것이다. 바로 거기에 이 문제를 이해하는 요점이 들어있다.

그런 학생들의 불평 속에는 사칙연산은 사람이 만든 연산이 아니라 원래 자연 속에 있는 연산이라는 생각이 들어있다. 처음에 모든 사람들이 그렇게 생각했었다. 하지만 수학을 많이 연구함에 따라서 사칙연산과 같은 것도 사람이 (괜히) 만든 연산과 같이 생각할 수 있다는 것, 그리고 그렇게 생각하는 것이 아주 많은 수학적인 문제들을 좀더 간단하고 일목요연하게 이해하는데 도움이 된다는 것을 알게 되었다. 그래서 이젠 교과서 안에서 학생들에게 <문제3>과 같은 문제를 통해서 그것을 암암리에 설명하고자 하는 것이다. 이런 설명을 좀더 그럴듯하게 느끼려면 다음 연산에서의 기호 '?'의 의미가 어떤 것일까 생각해 보자.

(이항연산) 1?1=1, 2?3=8, 3?3=27, 3?2=9, 2?4=16 …

이 연산은 순서쌍에 대응되는 숫자를 아무렇게나 정해 놓은, '쓸데없는' 장난같은 계산처럼 보일지도 모른다. 하지만 '?' 의 의미는 거듭제곱이다. 즉 위의 표현을 거듭제곱의 표현대로 고치면,

(이항연산) $1^1=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $3^2=9$, $2^4=16\cdots$

과 같이 된다.

만약 처음부터 이 연산이 거듭제곱이라는 것을 알았던 학생은 자신의 두뇌에 자부심을 느끼면서 기분이 좋을 것이다. 하지만 그렇지 못한 학생이 더 다행스러워해야만 한다.

그 학생은 '과연 그렇군!'하고 느끼면서, 거듭제곱 역시 하나의 이항연산이라는 것, 그리고 사칙연산만큼이나 자연스러운 계산방법인 거듭제곱이 연산기호를 바꿔 놓으면 엉뚱한 계산처럼 보인다는 것, 그래서 거꾸로 모든 연산은 기본적으로 순서쌍에 하나의 수를 대응시켜 놓은 것과 같이 사람이 적절히 만들어 놓은 수의 관계라는 것을 좀더 쉽게 느낄 수 있기 때문이다. 사칙연산만을 애지중지할 것인가, 아니면 조금 엉뚱해 보이더라도 수많은 연산들을 만들 수 있는 수학적 자유를 누릴 것인가?

인류는 두번째 것을 선택했던 것 같다.

전형적인 문제들

<문제4> 실수의 집합 R에 대하여 연산 ∘를 다음과 같이 정의한다.

$$a \circ b = a + b + ab$$

① 연산 ∘에 대한 교환법칙, 결합 법칙, 분배법칙이 성립하는가?
② 연산 ∘에 대한 항등원이 있으면 구하라.
③ 연산 ∘에 대한 5의 역원이 있으면 구하라.

이 문제를 이해하기 위해서는 설명을 해야할 것이 제법 많다.

먼저 설명해야 할 것은 모든 연산들이 모든 점에서 같은 것도 아니고 모든 점에서 다른 것도 아니라는 것이다.

계산방법들에도 특성들이 있다. 예를 들어서 자연수에 대하여 더하기와 같은 연산은 그 결과가 항상 보다 큰 수가 나온다는 것이 하나의 특징이 될 수 있다. 빼기는 당연히 더 작은 수가 나오는 특징을 가질 것이다. 수의 크기만이 특징이 될 수는 없다. 거듭제곱과 같은 계산은 2^3과 3^2이 같지 않지만 2+3과 3+2는 서로 같다. 이렇게 앞 뒤의 수가 바뀔 수 있는가 하는 것(이항연산에서는 순서쌍을 생각한다는 것을 기억하자.)도 특성이 될 수 있다. 또 좀 억지같이 보일 수 있겠지만, 그 계산을 했을 때 3의 배수가 한번이라도 답이 될 수 있는가 하는 것도 특성이 될 수 있다. 물론 웬만한 연산은 모두 3의 배수가 한번쯤은 답이 될 수 있을 것이다.

억지같은 성질들까지 연산의 특성들이라고 들먹여 본 까닭은, 연산의 특성들은 얼마든지 많이 찾을 수 있다는 것과 그 중에는 정말 필요 없는(몰라도 되는) 성질들도 많이 있다는 것을 강조하기 위해서이다.(더하기를 하다보면 3이나 9와 같은 답이 한번쯤 나올 수 있고 빼기나 곱하기, 나누기를 하더라도 한번쯤은 3이나 9 등의 3의 배수가 나오는 경우는 있을 것이다.)

쓸데없는 성질들을 생각할 수 있다면 중요한 성질들도 생각할 수 있다. 교환법칙과 결합법칙, 분배법칙은 이러한 중요한 성질들에 해당된다.

거듭제곱과 같은 연산은 교환법칙이 성립하지 않는다고 방금 강조했었다. 뺄셈도 마찬가지이다. 하지만 덧셈과 곱셈은 교환법칙이 성립한다. 결합법칙이란 계산의 순서를 바꾸는 것을 말한다. 예를 들어서 2+(3+4) = (2+3)+4와 같다는 것. 분배법칙은 a(b+c) = ab+ac 와 같이 괄호 안의 계산을 먼저 하고 곱해야 할 것을 각자 나누어서(배분) 계산해서 더해도 된다는 것을 나타낸다.

연산에서 교환법칙과 결합법칙, 분배법칙이 중요하게 된 것은 사람들이 오랫동안 그 계산방법을 사용하고 또 연구하다가 결정하게 된 것이다. 하지만 학생들도 쉽게 이 법칙들이 다른 특성들보다 중요한 특성이라는 것은 쉽게 추측할 수 있다. 어떤 연산에서 이러한 법칙들이 성립하는지를 알면 그 계산을 편리하게 하는데 많은 도움이 될 것이기 때문이다.

<<예를 들어서, a=3 b=6, c=−9일 때, $a^3+b^3+c^3-3abc$의 값을 계산하는 문제를 생각해 보자. 이 때 이 식의 인수분해 공식 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$를 알면 $a+b+c$의 값이 0이 될 때 $a^3+b^3+c^3-3abc$도 0이 되므로 쉽게 계산할 수 있다. 하지만 인수분해가 안된다면 훨씬 복잡할 것이다. 인수분해가 가능하려면 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립해야 한다.>>

교환법칙, 결합법칙, 분배법칙

어떤 연산에 대해서 교환법칙과 결합법칙, 분배법칙이 성립하는가를 확인하기 위해서는 “미지수”에 의한(즉, 모든 수에 대한) 계산결과를 비교해 보면 된다.

<<두 수의 위치를 바꿔서 계산했을 때 어떤 수에 대해서도 그 결과가 같다면 그 때 두 수의 위치는 ‘근본적으로’ 바뀌어도 괜찮은 것이다. 모든 수의 경우에 대해서 생각하기 위해서 계산을 해 볼 때, 숫자에 대해서 계산을 해 보는 것이 아니라 문자에 대해서 계산을 해 본다. 문자에는 어떤 수든지 들어갈 수 있기 때문이다.>>

<문제4>의 ①에서는

$a \circ b = a + b + ab$ 이고 $b \circ a = b + a + ba$

인데, 덧셈과 곱셈은 교환법칙이 성립하므로 두 계산은 서로 같은 결과를 나타낸다. 그러므로 교환법칙이 성립하는 것이다.

이 비교과정은 두 단계로 나누어서 해야 한다. <1>처음 단계에서 정의에 따라 기호와 순서를 바꾸지 않고 '그대로' 따라 쓰고 나서 <2>a+b와 ab가 교환법칙이 성립하는지, 그래서 각각 b+a와 ba와 같은지를 확인해야 한다.

한편 결합법칙은

$$a\circ(b\circ c)=a\circ(b+c+bc)=a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)$$
$$=a+b+c+bc+ab+ac+abc$$

이고

$$(a\circ b)\circ c=(a+b+ab)\circ c=(a+b+ab)+c+(a+b+ab)c$$
$$=a+b+ab+c+ac+bc+abc$$

이다.

여기서도 일단 <1>순서와 모든 기호를 정의에 따라서 그대로 풀어 썼다. <2>그리고 그 다음에 생각한다. 역시 덧셈의 교환법칙이 성립하므로 두 계산은 서로 같은 결과를 나타낸다. 그 결과 결합법칙이 역시 성립한다는 사실을 알게 된다.

한편 분배법칙은, a(b+c) = ab+ac와 같은 경우에서 보듯이 덧셈과 곱셈의 분배법칙처럼 두가지 연산이 필요하다. 그런데 이 문제에서는 연산이 하나만 정의되어 있으므로 분배법칙이 성립하는지에 대해서 따질 수가 없다. 즉 '알 수 없다'가 답이다.

이상과 같이 교환법칙이나 결합법칙, 분배법칙이 성립하는지를 따질 때는 사소한 것 하나하나를 섬세하게 따지는 것이 필요하다. 그래서 두 단계로 나누어 비교하라고 강조했다.

왜 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 따지는 것일까?

이러한 세가지 계산법칙은 아주 사소하고 단순해 보인다. 하지만 사실은 그렇게 단순하기만 한 것이 아니다.

학생들이 다항식의 연산과 인수분해 등에서 모든 복잡한 공식들이 실은 이 세 법칙의 반복적용에서 나타난다는 것을 알게 될 것이다.

교환법칙, 결합법칙, 분배법칙은 아주 많은 숫자들이나 식을 계산할 때 그 계산의 순서를 결정하는 역할을 한다. 그래서 계산이 틀리지 않으면서도 순서를 바꿔서 복잡한 계산을 간단하게 할 수 있도록 하는 것이다.

예를 들어서 3+2-5-2+5를 계산한다고 생각해 보자. 만약 두번째의 +2와 네번재의 -2를 먼저 계산할 수 없다면 이 계산은 항상 앞에서부터 하나하나 순서대로만 해야 할 것이다. 하지만 덧셈에 대한 교환법칙이 성립하므로 앞의 +2와 뒤쪽의 -2를 먼저 계산해서 0을 만들 수 있다. 마찬가지로 세번째의 -5와 마지막의 +5도 따로 모아서 계산하여 0을 만들 수 있다. 그래서 전체 계산 결과는 3이 된다. 이 때 '따로 모아서' 계산할 수 있도록 하는 것, 이것이 교환법칙과 결합법칙의 적용이다. 한편 분배법칙은 나누어서 계산하는 것이다.

많은 것들을 복잡하게 계산할 때 따로 모아서 계산할 수도 있고 따로 나누어서 계산할 수도 있다는 것, 그것이 자유롭게 된다는 것, 그것이 안된다면 얼마나 불편하겠는가? 그래서 세 법칙이 중요하다.

학생들이 다항식의 연산을 충분히 이해하면서 공부한다면 이 세가지 법칙이 곱셈공식과 인수분해 공식을 위해서 꼭 필요하다는 것을 배우게 될 것이다.

계산할 때 주의해야 할 점

교환법칙을 증명할 때는 b∘a의 결과를 a+b+ba나 a+b+ab처럼 아무렇게나 쓰지 않고 b+a+ba라고 항상 b가 a보다 먼저 오는 순서를 지켜서 썼다. 그리고는 하나하나를 비교하는 것이다.
처음 것은 a+b+ab이고 나중 것은 b+a+ba인데 a+b와 b+a는 덧셈의 교환법칙이 성립하기 때문에 같고 ab와 ba는 곱셈의 교환법칙이 성립하기 때문에 같다. 그런데 각 부분이 모두 같으면 그것들을 모두 합친 전체는 같다.(이것이 수학의 모든 분야에 깔린 철학적인 전제이다.) 그러므로 두 결과는 서로 같다. 이 모든 과정은 결합법칙에 대해서 검사할 때도 마찬가지로 적용된다.

왜 이렇게 짜증날 정도로 섬세하게 따져야만 하는가?
그 이유를 설명하고자 한다면 집합을 설명하기 전에 수학의 학문적 성격에 대해서 설명했던 내용을 다시 재방송해야만 한다. 즉 수학에서는 했던 말을 그대로 반복함으로써 확실히 옳은 것만을 찾고자 한다는 것, 거기에서 사소한 앞뒤 순서조차도 마음대로 바꾸어서는 안된다는 것 말이다. 그 사소한 순서 바꿈이 혹시나 무궁화호의 비극을 만들 수도 있기 때문이다.
수학은 거기에 매력이 있는 학문이다. 옳고 그른 것을 정확하게 따지는 학문, 그래서 아무리 작은 실수라도 찾아낼 수 있고 방지할 수 있도록 생각의 훈련을 하는 학문.