넷, 수 체계의 이해

실수 체계

집합과 명제를 배우고 나서 고등학생들이 배우는 단원이 실수체계이다.

여기서부터는 사람들이 상식적으로 생각하는 '수학'이라는 것의 특성이 좀 느껴지기 시작한다. 정말 숫자들이 나오고 그 숫자들의 계산방법에 대해서 의미있는 이야기들을 하는 것 같다. 여기서 다루는 내용은 사칙연산과 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 등의 연산의 법칙들, 그리고 항등원과 역원에 대한 것이다. 그리고 덧붙여서 학생들은 별로 의미가 없어 보이는 이러한 내용 외에도 좀더 진기하고 새로운 내용처럼 보이는 수의 포함 관계, 즉 자연수의 집합보다 정수의 집합이 더 크고, 정수보다는 유리수, 유리수와 무리수를 포함해서 실수라고 부른다는 것을 배운다. 학교 선생님들께서는 한번쯤, 실수 바깥에는 허수가 있고 실수와 허수를 합쳐서 복소수가 된다는 내용까지 설명해 주실 것이다. 정말 이제는 고등학교에서 새로운 수학을 배운다는 느낌이 든다.

지금까지 앞에서 설명한 집합과 명제 단원의 내용은 논리적인 체계이다.

이것은 곧 어떤 방식으로 생각해야 하는가를, 특히 수학과 같은 논리적인 학문에서 생각할 때의 형식적인 규칙을 가르쳐주는 내용이다. 비유하자면 그것은 생각의 길과 같고 혹은 어떤 내용물을 담는 상자와 같다고 할 수 있다. 그렇다면 그 길을 다니는 것, 상자 속에 들어가는 것은 무엇인가? 즉 형식적인 규칙 속의 알맹이는 무엇인가? 수학에서는 그 알맹이가 '수'이다.

수학의 알맹이는 왜 수일까? 그 까닭은 수가 가지는 몇가지 특성들이 있기 때문이다.

[1] 첫째로 수는 엄청나게 많다. 단순히 많다가 아니라 무한히 많다. 아무리 사용해도 고갈되지 않는다. 아무리 큰 수를 생각해도 더 큰 수를 생각할 수 있다. 그래서 풍부하게 생각하고 응용할 수 있다.

[2] 둘째로 그렇게 많으면서도 무질서하지가 않다. 아무리 큰 수들이라도 어느 것이 더 큰가 작은가, 혹은 어떤 수가 다른 수와 어떤 관계에 있는가를 분명하게 생각할 수 있는 경우가 대부분이다.

일단 이 두가지 특성만을 생각하기로 하자.

여기서 두번째 특성인 '무질서하지 않은' 특성이 수와 식 단원의 내용을 조금 어렵게 만든다. 숫자들은 어떻게 질서를 갖는가? 어떻게 생각하면 너무 당연한 것을 묻기 때문에 어렵지만 그것이 왜 당연한지는 오히려 더 어렵다. 이것을 설명하는 것이 함수이다.

따라서 실수체계와 가장 관련깊은 수학의 단원이 어느 단원이냐고 묻는다면 그것은 함수 단원이다.

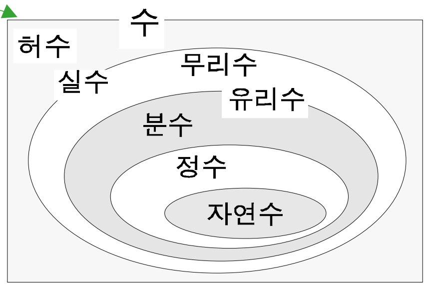
<<그래서 대학교에서 전문적으로 배우는 수학, 특히 '해석학'에서는 제일 먼저 집합과 명제, 그리고 함수를 배운다. 하지만 이 책은 고등학생을 위한 책이므로 고교 교과과정 순서에 따를 것이다.>>

하지만 고등학생들 중에 이 실수체계의 내용과 가장 관련깊은 수학의 다른 단원 내용이 "함수"라는 설명을 듣고 "음, 과연 그렇겠군!"하고 고개를 끄덕일 수 있는 사람은 거의 없을 것이다. 대부분의 학생들은 중학교에

서 함수란 이런 것이야– 라고 한번쯤 배웠기 때문에 오히려 더 “함수와 실수체계가 무슨 상관이야?”하고 생각하기 쉽다. 하지만 학생들이 비교적 쉬운 내용으로 생각하는 실수체계 내에서 비교적 어려워하는 내용인 항등원과 역원을 잘 이해하고(그래서 그 관련 문제들을 잘 풀수 있고) 더 나아가서 수학 전체의 깊이있는 조화를 이해하기 위해서는 함수와 실수체계, 특히 사칙연산과의 관계를 이해해야만 한다.

수의 체계

옆의 그림을 잘 이해하고 있으면 수의 체계에 대한 기본적인 지식의 윤곽은 대략 잡았다고 할 수 있다.



대부분의 학생들은 이 그림의 의미를 잘 알 것이다. 하지만 혹시나 모르는 학생을 위하여 설명을 하겠다.

<그림의 의미>

자연수 : 1,2,3,4,5…와 같은 수를 말한다.

정수 : …-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3…과 같은 수를 말한다.

분수 : $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{2}(=3)$과 같은 수들을 말한다.

유리수 : 분수로 나타낼 수 있는 수를 말하며 이것을 소수로 나타내면 유한소수(소수점 끝자리가 있는 소수)와 순환하는 무한소수로 구성된다.

유리수의 정의 : $r=\frac{n}{m}$ (m은 자연수, n은 정수이고 m과 n은 서로소)로 나타낼 수 있는 모든 수.

무리수 : 순환하지 않는 무한소수를 나타낸다. 예를 들면 $\sqrt{2}$= 1.414…, π=3.141592… 등이다.

실수 : 유리수와 무리수를 합친 것. 실제적으로 어떤 크기를 나타내는 수를 말한다.

허수 : 실수가 아닌 수, 즉 어떤 실제적인 크기를 나타내지 않는 가상의 수.(잠시 후에 자세히 설명할 것임)

<문제1> 실수 $\sqrt{3}$이 무리수임을 증명하시오.

이런 문제를 보면 학생들은 황당함을 느낄 것이다. $\sqrt{3}$이 무리수가 아니면 유리수란 말인가? 이런 당연한 것을 어떻게 증명한단 말인가? 하지만 앞(집합 단원)에서 우리는 이렇게 당연해 보이는 것을 어떻게 증명하는가에 대해서 설명했다.

즉 더 확실한 것, 수학 개념의 정의와 그리고 문제 속에 이미 나타나 있는 것에서부터 출발해야 한다.

먼저 무리수란 무엇인가?

무리수란 “순환하지 않는 무한소수”를 나타낸다. 이것을 수학식으로 써 보자.(수학식은 정의를 수학적 의미로 해석한 것이다.) 하지만 이것은 아무래도 쉽지 않다. 대신에 우리는 이렇게 생각할 수 있다. 무리수는 유리수가 아닌 실수라고. 그리고 실제로 이 생각이 증명 문제의 출발점이다.

그리고 이 출발점에서는 “실수 $\sqrt{3}$이 유리수라는 것”은 ‘엉터리’임을 증명하여 무리수임을 증명하는 것이 가장 쉽다. 그래서 귀류법을 이용해서 증명을 하게 된다.

<<무리수는 유리수가 아니라는 데에서 증명 문제를 출발하는 것, 그것은 논리만으로 생각할 수 있는 것이 아니다. 학생들로서는 문제를 다양하게 풀어 본 경험을 토대로 이런 생각을 해 낼 수 있어야 한다.>>

그래서 교과서의 풀이 내용을 보면 아래와 같다.

이 증명을 보면 이해가 되는가? 이해가 되지 않는다면 어느 부분이 이해되지 않는가?

귀류법을 이해하는 학생들은 이제 " $\sqrt{3}$이 유리수이다" 라는 명제를 전제하고 모순을 끌어내면 된다라는, 문제해결의 큰 틀을 이해할 것이다.

그러면 유리수란 무엇인가? 학생들은 여기서 잘 막힌다. 정의에 따르면 "유리수 r이란 $r=\frac{n}{m}$(m은 자연수, n은 정수이고 m과 n은 서로소)로 나타낼 수 있는 모든 수" 이다.

<<이 정의를 가만히 보면 분자가 자연수이므로 0이 아니게 되고 분모가 정수이므로 전체 분수는 양수와 음수를 모두 나타낼 수 있게 된다. 그리고 분자와 분모가 서로소 이므로 항상 약분된 형태로만 나타나게 된다.>>

$\frac{n}{m}$의 꼴로 나타낼 수 없는 수를 무리수라 한다. 따라서 " $\sqrt{3}$이 유리수이다" 라는 명제는 " $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ " 가 된다.

<<방금 제시한 유리수의 정의보다 느슨한 정의가 고등학교 참고서에 흔히 나타난다. 그것은 "유리수란 n과 m이 정수이고 m이 0이 아닐 때 $\frac{n}{m}$으로 나타내어지는 수"이다. 이 정의에 따르면 같은 유리수들이 약분되지 않은 분수들로 중복되어 나타날 것이다. 그리고 <문제1>의 풀이에서 왜 서로소 조건을 제시하는지 궁금하게 될 것이다. 그만큼 수학 개념의 정의를 잘 아는 것은 중요하다.>>

<문제1>의 풀이 :

$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$(p, q는 서로소인 양의 정수)라 가정하자. 그러면 양 변을 제곱하여,

$3=\frac{p^2}{q^2}$, 따라서 $3q^2=p^2$

이 식의 좌변은 3의 배수이므로 p^2도 3의 배수이다. 따라서 p는 3의 배수이다.

$p=3r$(r은 양의 정수)로 놓고, 위의 식에 대입하면,

$3q^2=(3r)^2$이고 따라서 $q^2=3r^2$

그러므로 q도 3의 배수이다.

p, q가 모두 3의 배수가 되어 서로소라는 가정에 모순이다.

그러므로 $\sqrt{3}$은 무리수이다.

학생들이 이해하기 어려운 것은
이 증명에 여러 가지 규칙들이 적용되고 있는데 어디까지 증명에 끌어와도 되고 어떤 것은 끌어오면 안 되는가 하는 것이다.

예를 들어 보자. 이 부분까지는 그런대로 수긍할 수 있다고 하더라도 이런 부분은 아주 당연한 것 같지 않다. 특히 " $\sqrt{3}$이 무리수" 라는 것과 같이 (얼핏) 당연해 보이는 사실을 증명하는데 " p^2이 3의 배수이면 p도 3의 배수이다" 와 같은 덜 당연해 보이는, 혹은 비슷한 정도로만 당연해 보이는 명제를 마구 끌어들일 수 있는가? (그 다음의 내용인 이 부분도 똑같다. 그리고 나면 증명은 끝난다.)

증명에 끌어들여도 되는 것과 끌어들이면 안되는 것

<문제1>의 증명은 무리수가 단지 유리수가 아니라는 것만을 아는 사람에게 $\sqrt{3}$이 유리수가 아니라는 것, 그래서 무리수라는 것을 보여주기 위한 증명이다. 무리수 이전의 것, 즉 자연수, 정수, 유리수, 그리고 그에 따르는 기본적인 사칙연산이 무엇인지를 알고 어떤 수 $\sqrt{3}$이 유리수가 아님을 증명한다는 말이다. 왜냐하면 무리수는 정의(순환하지 않는 무한소수)에 따라서 유리수가 아니기 때문이다.

"p^2이 3의 배수이면 p도 3의 배수이다"와 같은 명제는 썩 당연해 보이지 않아도 몇 가지 더 간단한 규칙들로 구성된 명제이기 때문에 이 증명에 도입된다. 결론을 먼저 말하면 <문제1>의 증명은 수 체계를 증명하는 것으로서 자연수, 정수, 유리수가 각각 무엇인가 하는 것, 그리고 사칙연산에 대한 것이 이미 확실하다고 가정하는 상태에서 이루어지고 있다. 이 명제도 바로 사칙연산이 무엇인가를 생각하면 당연한 것이라고 생각하고 제시하는 것이다.

즉 다음과 같이 생각해 보면 알 수 있다.

"p^2이 3의 배수이면 $p \times p$ 속에 3이 들어있다. 즉 p 속에 3이 들어있다. 그렇다면 둘 다 같은 p이므로 3은 두 개 들어있을 것이다. 그것을 수식으로 나타내면 $p \times p = (3 \times r) \times (3 \times r)$ (여기서 r은 '그냥' 어떤 수)로 나타낼 수 있는 것이다. 그래서 p는 3의 배수가 된다."

여기에 어떤 규칙들만 적용되었는가? 곱셈이 무엇인가 하는 것(여기에 배수 관계도 포함된다), 그리고 어느 하나의 p가 3의 배수라면 다른 p도 3의 배수라는 것, 다시 말하면 "같은 것은 서로 같다"라는, 너무 당연한 생각이 적용되었을 뿐이다.

<<그러므로 어떤 증명을 잘 이해하기 위해서는 어떤 것을 알고 어떤 것을 모르는 사람에게 무엇을 가르쳐주는 증명인지를 이해해야만 한다.>>

자연수와 정수는 분명하게 알고 있는가

<문제1>을 해결하려다 유리수의 정의를 분명하게 알지 못하면 당황하게 된다. 그렇다면 자연수와 정수는 우리가 분명하게 알고 있을까? 자연수의 정의는 무엇인가? 자연수를 잠시 밀쳐두고 정수를 먼저 생각하자.

정수는 "자연수와 0, 음의 정수"라고 대답할 수 있을 것이다. 만약 이것을 식으로 나타내야 할 필요가 있다면 어떻게 해야 할까? 이미 자연수를 알고 있다고 가정해야만 한다. 그리고 정수는 a가 자연수일 때, "a이거나 영, 혹은 $-a$이다" 라고 할 수 있다.

자연수는 쉽게 생각하면 아주 쉽고 어렵게 생각하면 아주 어렵다.

쉽게 생각하자면 자연수란 "1,2,3,4,5,…와 같은 수"라고 할 수 있다.

어렵게 생각하자면 어떻게 할 수 있을까? 자연수를 어렵게 생각해 보면 거기서 엉뚱한 수확을 얻을 수 있게 된다. 그것은 수학적 귀납법의 뿌리이다.

이 내용은 수학자들이 아주 많은 생각을 함축적이고 논리적으로 표현하는 어려운 내용이지만 쉽게 풀어서, 대신 대략적으로 설명해 보면 다음과 같다. 즉

1을 출발점으로 하여 1씩 계속 커져서 될 수 있는 모든 수가 자연수이다.

이것을 집합 기호를 사용해서 제시하면 다음과 같이 된다.

$\mathbb{N}$이 자연수일 때 (i)$1\in\mathbb{N}$이고 또한 (ii) $n\in\mathbb{N}$이면 $n+1\in\mathbb{N}$이다.

<<방금 제시한 자연수의 정의, 혹은 조건이 눈에 익숙한 학생들은 그것이 곧 수학적 귀납법의 증명 방법의 제일 중요한 부분이라는 것을 알 수 있을 것이다.>>

왜 이 말이 그 위의 말과 같은 뜻이 되는가? 1이 자연수라면 1+1=2도 자연수이고 다시 2가 자연수라면 2+1=3도 자연수이고, 다시 3이 자연수라면 3+1=4도 자연수이고…로 계속되기 때문이다. 결국 이것이 말하는 것이 바로 '1,2,3,4,5,…와 같은 수'이다.

이렇게 보면 가끔씩 학생들이 보게 되는 수학적 귀납법이라는 것은 이미 자연수 속에 포함되어 있는 것임을 알 수 있을 것이다. (그래서 수학적 귀납법은 귀납법이 아니라는 주장도 있다.)

<<난 이 부분을 공부할 때 더하기나 집합 기호를 사용한 수학적 표현으로 나타내기 어려운 갖가지 것을 정말 잘도 표현하는구나-하고 감탄하였다. 하지만 모든 학생들이 나와 같이 생각하지는 않을 것이다. 만약 이 부분이 어렵게 느껴진다면 대충 넘어가도 된다. 가능하면 나중에 생각날 때 다시 한번 봐 주면 더 좋구.>>

일단 어려워서 그냥 한번 읽고 넘어가든 이해를 하고 넘어가든, 우리는 자연수와 정수를 수학적으로 이해했다. 그리고 유리수는 앞에서 이해했다.

이 정도까지 이해할 수 있는 학생이라면 짝수나 홀수, 그리고 3의 배수 등과 같은 말을 수학적인 식으로 표현하는 것을 그렇게 어렵게 여기지 않을 것이다.(금방 식을 만들지는 못하더라도 풀이를 한 번 보고 나면 이해할 수 있을 것이다.) 짝수라면 집합 $\{x \mid x=2n,\ n\in$자연수$\}$의 원소로, 홀수라면 집합 $\{x \mid x=2n+1,\ n\in$자연수$\}$의 원소로, 그리고 3의 배수는 집합 $\{x \mid x=3n,\ n\in$자연수$\}$의 원소로 나타내면 된다. (이러한 이해는 나중에 <문제2>를 풀기 위해 필요할 것이다.)

이항연산이란 무엇인가? 그것은 추상화이다.

이젠 학생들이 잘 모르는 것을 먼저 짚어 보자.

학생들이 실수체계에서 이해하지 못하고 넘어가는 것은 사칙연산의 의미이다.

사칙연산이란 무엇인가?

더하기, 빼기, 곱하기, 나누기를 말하는 것이다. 이것을 어렵게 생각하는 사람도 없고 복잡하게 생각할 학

생들도 없을 것이다. 하지만 그렇게 단순하지가 않다.

사칙연산을 "사칙연산"이라고 부르는 것은 네가지 규칙의 연산이기 때문이다. 네가지 규칙이란 곧 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기이다.

그럼 연산이란 무엇인가?

여기에 학생들이 잘 이해하지 않고 넘어가는 어려운 점이 있다.

일정한 법칙에 따라 어떤 결과를 내는 조작을 "연산"이라고 한다. 이것을 수학적인 정의를 통해서 이해해 보면,

집합 M의 두개의 원 a,b의 순서쌍 (a,b)에 대응하는 M의 원 c가 하나 정해질 때, 이 대응을 집합 M의 "이항연산" 또는 간단히 "연산"이라 하고, 기호 ∘등을 써서 a∘b=c로 나타낸다.

예를 들어 두개의 원 2와 3의 순서쌍(2,3)이 있을 때 여기에 5가 대응되고 (1,2)가 있을 때 여기에는 3이 대응된다면 이것은 곧 2+3=5, 1+2=3이 된다는 말이다. 만약에 (2,3)에 대해서 5가 아니라 6이 대응되고 (1,2)에 대해서는 2가 대응된다면 2×3=6, 1×2=2가 될 수도 있을 것이다.

이 때 첫번째 규칙은 더하기라는 하나의 '연산'이 될 것이고 두번째 규칙은 곱하기라는 하나의 연산이 된다. 빼기와 나누기에 대해서도 마찬가지로 이야기할 수 있다.

이 때 기호 '∘'가 의미하는 것은 "+,-,×,÷ 혹은 제곱과 같은 '계산 기호의 미지수'이다.

*a*나 *b*가 아무거나 들어갈 수 있는 자리에 *x*를 넣어 생각하듯이 +나 ×등 아무거나 들어갈 수 있는 자리에 *를 넣은 것이다.

<보충 설명1>

왜 그냥 '2와 3'이라고 하지 않고 '2와 3의 순서쌍 (2,3)'이라고 할까?

그것은 '2와 3'이라고만 한다면 '2와 3'이나 '3과 2'가 서로 구분되지 않지만(즉, 순서가 바뀌어도 구분되지 않지만) 순서쌍(2,3)은 (3,2)와 서로 구분되어야 한다는 것을 의미한다. 그래서 '순서'쌍이다. 만약 순서쌍이 아니고, 그래서 순서가 중요하지 않다면 빼기와 같은 연산에 있어서 2-3이나 3-2가 서로 같아야만 할 것이다. 이것은 좀 이상해 보인다.

이 순서쌍의 의미 때문에 '교환 법칙'이 문제시된다.

그러므로 좀더 쉽게 말하면, '연산'의 정의란 것은, 우리가 일반적으로 알고 있는 계산 방법, 즉 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기 등의 공통점만을 추려서 정리해 놓은 것을 가리킨다.

이렇게 여러 가지 다른 것들의 공통점만을 뽑아서 정리하는 것을 '추상화'라고 한다.

이러한 연산의 정의를 통해서 우리는 다음과 같은 것을 알 수 있다.

어릴 때부터 학생들은 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기의 계산방법을 배우고 또 그것을 실생활의 아주 많은 부분에서 사용하기 때문에 그러한 사칙연산은 숫자의 특성 속에 원래 포함되어 있는 것이라는 생각을 하기 쉽다. 그런데 사실은 그렇지가 않다.(이 말은 나중에 다시 번복될 것이다.)

연산의 정의를 보면, 그 내용은 곧 순서쌍 (a,b)에 c를 각각 대응시키는 '규칙'이라는 것을 알 수 있다.사칙연산도 사람들이 숫자를 쓰면서 만든 사람들의 규칙이라는 것이다.

한편 이것을 또 관점에서도 이해할 수 있는데, 그것은 규칙이라는 것은 하나의 약속이고 얼마든지 사람들이 만들어낼 수 있는 것이기 때문에 지금까지 없었던 많은 연산을 누구나 쉽게 만들 수 있다는 것이다.

예를 들어 (3,4)에는 34를 대응시키고 (5,2)에는 52를 대응시키는 연산도 생각할 수 있다. 또 정말 아무런 규칙성이 없는 연산도 생각할 수 있다. 예를 들어서 (2,6)에는 100을, (3,8)에는 15를, (4,7)에는 874630을 대응시키는 연

산 같은 것. 문제는 이런 연산이 별로 쓸모가 없다는 것이지 수학적으로 문제가 있는 것은 아니다. 수학이라는 학문은 한번 했던 말을 처음부터 끝까지 주장하는 고집불통의 성격을 가지고 있다는 것을 다시 한번 생각하자.

<<수학에서는 별로 쓸데없는 말이라도 끝까지 밀어 붙여서 결국에 가서 모순만 안생기면 된다. 모순이 생긴다는 것은 서로 말이 안맞다는 것이다. 이것이 제일 먼저 중요하다. 끝까지 밀어붙이는 그 규칙들이나 주장들이 쓸모가 있는가 없는가 하는 것은 그 다음의 문제이다.>>

계산이 이어진다는 것과 연산이 닫혀있다는 것.

마지막으로 빠뜨려서는 안되는 것은,

순서쌍을 구성하는 a,b라는 숫자들과 c가 모두 같은 집합 M에 속한다는 ‘조건’이다. 이 조건이 있으면 그 연산은 “집합 M에 닫혀있다”라고 말한다. 이 닫혀있는 조건이 있어야만 ‘계산’이 계속적으로 이어질 수 있고 그래서 계산이 제대로 이루어질 수 있기 때문이다.

계산이 이루어진다는 것은 어떤 것인가?

이것을 쉽게 설명해 보면 다음과 같이 말할 수도 있다. 예를 들어서 앞에서 계산이라는 것이 규칙이라고 했으므로, 그 규칙을 2+3=구두, 4+5=자동차…라는 식으로 정했다고 생각해 보자. 처음에 2,3,4,5,에서 출발해서 더하기 계산을 하니까 각각 ‘구두’와 ‘자동차’가 나왔다. 그런 다음에는 무얼 하는가? …정말 무얼하지? 구두+자동차를 해 봐? 아무래도 너무 터무니없는 일을 한다는 느낌을 이 글을 읽는 학생들이 먼저 느낄 것이다. 그리고 실제로 그러하다.

이 경우에 어디에서부터 문제가 생겨나는가? 숫자와 숫자를 더해서 숫자가 계산되어야 하는데 숫자가 아닌, 전혀 다른 것이 계산되어 나온다는 데에서부터 문제가 생겨난다. 전혀 다른 것들이 모임이 무엇을 의미할까? 서로 다른 집합이라는 것을 의미하지 않는가?

이렇게 생각해 보면 우리는, 어떤 대응 규칙을 만들었을 때 그에 따라서 생겨나는 대응값이 다른 집합에서 다른 집합으로 연결되면(즉, M의 원이 아니면) 별로 의미가 없어지고 계산이 제대로 이루어질 수 없다는 것을 알 수 있다. 다시 이항연산이 무엇이었던가를 기억해 보자.

집합 M의 두개의 원 a,b의 순서쌍 (a,b)에 대응하는 <M의 원> c가 하나 정해질 때, 이 대응을 집합 M의 “이항연산” 또는 간단히 “연산”이라 하고, 기호 ∘등을 써서 a∘b=c로 나타낸다.

계산이 이어지지 않는다는 것은 처음에 2,3,4,5에서 시작해서 구두와 자동차가 계산되고 나면 구두와 자동차는 서로 더하기를 할 수 없게 된다는 말이다.

처음부터 연산은 규칙이고 약속이라고 했다.

그렇다면 (구두, 자동차)라는 순서쌍에 대해서 또 연산규칙을 약속하면 되지 않느냐고 생각하는 학생이 있을 수 있다. 정말 이런 학생이 있다면 그 학생은 바보…인 것이 아니라 수학적인 재능이 탁월한 학생이라고 할 수 있다.

하지만 다음과 같은 생각을 한번 더 하는 학생은 더욱 천재일 것이다. 즉, 그렇게 (구두, 자동차)의 순서쌍

에 대해서 새로이 연산규칙을 정하고 거기에 또 '강'이나 '산'과 같은 것을 대응시킨다면 우리는 한번 계산을 하고 난 후 항상 새로운 규칙을 만들어야 할 것이다. 그렇게 된다면 뭔가를 계산하는 것보다 매번 규칙을 만드는 일이 더 번거롭고 귀찮은 일이 될 것이다. 그럼 애초에 우리는 왜 연산규칙을 만들어가지고 이 고생을 사서 하는가?

문제는 어디서부터 생겨났는가?

순서쌍 (a,b)에 대응하는 c가 하나 정해질 때, 이 c가 원래 a와 b가 속하는 집합 M에 같이 속하지 않는다고 생각했기 때문에 생겨났다. 그렇다면 이 문제의 해결은 c도 역시 M에 속한다고 함으로써 간단히 해결된다. 즉 이제는 연산규칙을 하나 약속함으로써 얼마든지 계산을 할 수 있다.

이상의 내용을 정리하면 다음과 같다.

이항연산이란 집합 M의 두개의 원 a,b의 순서쌍 (a,b)에 대응하는 c가 하나 정해지는 대응규칙이기만 하면 된다.(닫혀있거나 닫혀있지 않거나 상관없이.) 그런데 c도 M의 원이 아니면(닫혀있지 않으면) 이러한 대응규칙은 아무짝에도 쓸모가 없다.

따라서 이항연산이 제대로 조건을 갖추려면(즉 정의되기 위해서는) 그 연산이 주어진 수집합에 대해서 '닫혀 있어야' 한다.

<<연산이 닫혀 있다는 것을 달리 표현하자면 이렇게 말할 수 있다. 즉 연산이 닫혀 있다는 것은 그 집합 속에서 연산을 수행하면 "꼬리에 꼬리를 물고" 계속 이루어질 수 있다는 것을 뜻한다.>>