귀류법이란 이런 것이다.

철수가 냉장고에서 무엇인가를 꺼내어서 먹었다. 냉장고 안에는 초콜렛과 사과, 그리고 떡만이 들어있었다. 철수는 분명히 초콜렛을 먹었다는 것을 증명하려면 어떻게 하면 될까? 철수의 위장 속에 내시경을 넣어서 초콜렛이 녹아있다는 것을 보여줘? 그것보다는 냉장고를 열어서 사과와 떡이 그대로 남아있다는 것을 보여주는 것이 낫지 않을까?

철수의 위장 속에 내시경을 집어넣어서 정말 초콜렛이 철수의 배 속에 들어있다는 것을 ‘직접’ 보여주는 것이 직접 증명법이다. 그리고 냉장고를 열어서 사과와 떡이 남아있다는 것을 보여주는 것이 간접 증명법이다. 왜냐하면 철수가 사과와 떡을 먹지 않았고 그래서 그 밖의 다른 것을 먹었다는 것을 보여줌으로써 초콜렛을 먹었다는 것을 ‘간접적으로’ 보여주기 때문이다. 그리고 이것이 곧 귀류법의 논리이다.

귀류법의 논리를 정리하면 다음과 같이 말할 수 있다.

<<다음의 두 설명 중 어느 것 하나만 잘 이해하면 된다.>>

<설명1>

철수가 분명히 무엇인가를 먹었는데 초콜렛만 빼고는 모든 것이 남아있다. 그렇다면 철수는 초콜렛을 먹었지 않을까? 당연히 그렇게 생각해야만 한다.(하지만 그렇게 생각하지 않는 아주 엄격한 수학자들도 있다.) 이 얘기를 좀 다르게 고쳐 보면 이렇게 말할 수 있다.

<1>철수가 냉장고에서 초콜렛을 꺼내 먹었다는 것을 증명하려 할 때, <2>철수가 다른 것을 먹었다고 생각하고 <3>냉장고 안에 남은 것과 비교해서 말이 안된다는 것을 보여줌으로써 <4>철수가 초콜렛을 먹었다는 것이 옳다는 것을 간접적으로 보여준다.	↔	<1>일반적으로 어떤 명제가 성립한다는 것을 증명하려 할 때, <2>그 명제나 그 명제의 결론을 부정하여 <3>공리, 정리, 가정 등에 모순이 됨을 이끌어 냄으로써 <4>그 명제가 성립함을 단정짓는 증명법을 귀류법이라 한다.

그런데 왜 앞의 것은 당연하게 보이는데 뒤의 것은 긴가민가할까?
그 까닭은 다음과 같다.

철수 이야기에서 우리는 “철수가 무엇인가를 먹었다”라는 것을 분명하게 가정하고 있다. 즉 철수는 초콜렛과 사과, 그리고 떡 중의 하나를 분명히 먹었다. 그 전제 하에서 사과와 떡이 남아있으므로 철수가 초콜렛을 먹었다고 생각하게 된다.

마찬가지로 생각하기 위해서 이 이야기에 한가지를 덧붙여야 한다. 철수가 무엇인가를 먹었다는 것에 해당하는 것, 즉 **모든 명제는 참이거나 거짓이거나 그 둘 중의 하나**라는 것이다.

그럼 이렇게 생각할 수 있다. 어떤 명제가 거짓말이 아니라면 참말이다. 그런데 그 명제가 거짓말이라고 하면 우리가 확실히 알고 있는 것들과 서로 아귀가 맞지 않는다면 그 명제는 거짓말이 아니어야 한다, 즉 참말이어야 한다…라고.

이 설명이 가장 필요한 학생은 다음과 같은 학생이다.

예를 들어서 “$\sqrt{3}$이 유리수가 아님을 증명하라”는 문제를 보니까 $\sqrt{3}$이 유리수라고 했을 때 모순이 생긴다는 말만 해 놓은 것을 보고 의아해 하는 학생이 있다. 즉 “$\sqrt{3}$이 유리수일 경우에 모순이 생긴다는 것을 보여주었을 뿐인데 어떻게 $\sqrt{3}$이 유리수가 아니라는 것”을 증명한 셈이 될까?”라고 이상하게 여기는 것이다. 이런 학생이 바로 “$\sqrt{3}$은 유리수이거나 유리수가 아니거나 둘 중의 하나이다”라는 말을 빠뜨리고 생각하고 있는 것이다.

이렇게 생각할 때 귀류법은 다음과 같이 정리할 수 있다.

[1] 모든 명제는 거짓이 아니라면 참이다.(거짓이란 것은 참이 아니라는 것이다.<부정>)
[2] 그렇다면 ‘어떤 명제가 거짓’이 아니라는 것을 보여도 그 명제가 참이라는 것을 알 수 있다.
[3] 그런데 정말 ‘그 명제가 거짓’이라는 말을 믿고 따라보니까 엉터리였다(이미 옳다고 확인된 공리나 가정과 서로 맞지 않다)라고 한다면 ‘그 명제가 거짓’이 아니다.
[4] 즉 그 명제는 참이 된다.

여기서 <1><2>는 당연한 것으로서 생략되니까 대부분의 증명 내용은 <3>에 집중된다.

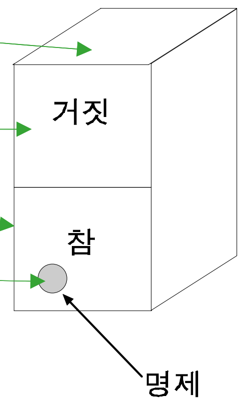
<설명2>

귀류법을 그림으로 설명하면 다음과 같다. 어떤 명제는 이 큰 상자 안에 있다.

그런데 거짓 부분을 열어 보니까 그 명제가 없다.

그렇다면 그 명제는 분명히 참 부분에 있을 수 밖에 없지 않겠는가?

이것이 귀류법의 원리이다.



여기에서 흔히 생략되는 것은 어떤 명제가 이 큰 상자 안 어디엔가 들어있다는 것, 즉 어떤 명제가 참이 아니면 거짓이라는 것이다. 일반적인 설명에서는 이것이 너무 당연하니까 생략된다.(왜냐하면 수학에서 명제는 참이 아니면 거짓이니까.) 그리고 학생들이 금방 이해하지 못하는 것은 다음과 같은 것이다. 즉 상자의 거짓 부분을 열면 명제가 없다는 것이 논리적인 설명에서는 어떻게 나타나는가?

그것은 다음과 같이 말할 수 있다.

증명의 출발점은 명제가 거짓에 들어있다는 것이다.(명제가 거짓이라고 가정) 그리고는 거짓 부분을 열어보면(논리를 진행시킴) 그 명제가 들어있지 않다.(처음의 가정과 모순) 그렇다면 명제는 참에 들어있어야 한다.

이렇게 생각하고 <문제19> ‘p가 짝수, q가 홀수이면 방정식 $x^2+px-2q=0$은 정수근을 갖지 않는다“는 것을 증명해 보자.

먼저 이 명제를 부정해야 한다. 즉 p가 짝수, q가 홀수라도 방정식 $x^2+px-2q=0$은 정수근을 갖는다. 그리고 이 말이 엉터리라는 것을 보여보자.(여기서 중요한 부분은 뒤쪽 부분이다.)

“$x^2+px-2q=0$이 정수근을 갖는다”란 말은 무엇을 나타내는가? x의 값이 정수라는 말이다. 여기서 출발해서 이 말이 엉터리임을 보여줘야 한다.

“x가 정수이다”에서 어떤 방향으로 출발하는가? 정수에는 홀수와 짝수가 있다. x가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각한다.

<귀류법 정리>
[1] 모든 명제는 거짓이 아니라면 참이다.
[2] 그렇다면 ‘어떤 명제가 거짓’이 아니라는 것을 보여도 그 명제가 참이라는 것을 알 수 있다.
[3] 그런데 정말 ‘그 명제가 거짓’이라는 말을 믿고 따라 보니까 엉터리였다라고 한다면 ‘그 명제가 거짓’이 아니다.
[4] 즉 그 명제는 참이 된다.

<<우리는 정수가 양의 정수와 0, 그리고 음의 정수로 구분된다는 것을 기초 개념으로 배웠다. 그런데 어떻게 정수를 양의 정수나 음의 정수로 나눌 생각을 하지 않고 홀수와 짝수로 나눌 생각을 할 수 있는가?

<첫째> 문제에 “p가 짝수, q가 홀수이면”이라는 말이 있기 때문이다. 하지만 <둘째>더 중요한 것은, 증명의 출발점은 증명의 전체를 생각하면서 알 수 있다는 것이다. 대략적으로 전체적인 증명을 어떻게 할지를 생각해 보고 나서 어떤 식으로 증명의 출발점을 잡을 것인가를 안다.>>

<<정수가 짝수와 홀수로 나뉜다는 것은 여러가지 문제들을 통해서 “n이 양의 정수일 때 짝수는 $2n$으로, 그리고 홀수는 $2n+1$로 나타낼 수 있음”을 읽기 때문에 배우게 된다. 따라서 짝수란 2의 배수이며 홀수란 2의 배수가 아닌 수, 그래서 2로 나눈 나머지가 1인 수이다.(이것은 잉여류를 다루면서 배우게 된다.)>>

먼저 x가 짝수라고 해 보자.

x가 짝수이고 p가 짝수, q가 홀수인 경우에 $x^2+px-2q=0$이 성립할 수 있는가? 짝수라는 것은 2의 배수를 나타낸다. 짝수와 짝수의 곱은 2의 배수와 2의 배수를 곱하는 것이므로 4의 배수가 된다. 따라서 x^2는 4의 배수가 되고 p가 짝수이므로 px도 4의 배수, 그 합도 4의 배수가 된다($4n+4m=4(n+m)$). 그런데 q는 홀수이므로 $2q$는 4의 배수가 될 수 없다. 그러면 x^2+px는 4의 배수이고 $2q$는 4의 배수가 아니므로 서로 같을 수가 없다. 따라서 $x^2+px-2q=0$은 엉터리가 된다.

(즉 x가 짝수라는 말은 엉터리이다.)

x가 홀수인 경우는 어떨까?

이 경우에는 문제가 없을까?(특히 $x^2+px-2q=0$이 성립할까?)

x가 홀수이면 홀수 곱하기 홀수는 홀수이므로 x^2는 홀수이다. 하지만 홀수와 짝수를 곱하면 짝수가 나오므로(2의 배수[짝수]에 어떤 수[홀수]를 곱해도 거기엔 결국 2가 곱해져 있다. 즉 짝수이다.) px와 $2q$는 짝수이다. 짝수에서 짝수를 빼면 짝수가 나온다. 따라서 $px-2q$는 짝수이다. 그러면 홀수(x^2)에 짝수($px-2q$)를 더하면($x^2+px-2q$) 0이 될 수 있는가? 아무래도 0이 될 수 없다. 따라서 역시 $x^2+px-2q=0$은 엉터리가 된다.

(즉 x가 홀수라는 말도 엉터리이다.)

<귀류법 정리>

[1] 모든 명제는 거짓이 아니라면 참이다.

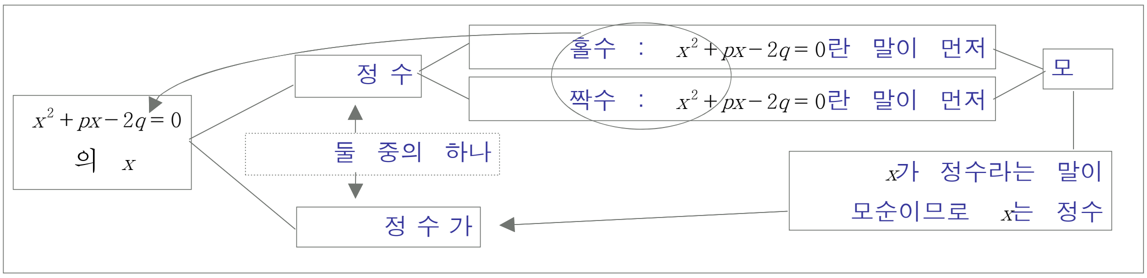
[2] 그렇다면 '어떤 명제가 거짓'이 아니라는 것을 보여도 그 명제가 참이라는 것을 알 수 있다.

[3] 그런데 정말 '그 명제가 거짓'이라는 말을 믿고 따라 보니까 엉터리였다라고 한다면 그 명제가 거짓'이 아니다.

[4] 즉 그 명제는 참이 된다.

x가 짝수도 아니고 홀수도 아니라면 x는 정수가 아니다. 즉, 처음에 우리는 x가 정수라고 말해 보았고 그러려면 x가 짝수이거나 홀수이어야 하는데 어느 쪽도 엉터리이므로 x가 정수라는 말 ("$x^2+px-2q=0$가 정수근을 갖지 않지 않는다"는 명제가 거짓이라는 말) 자체가 엉터리임을 보였다. 이 말은 $x^2+px-2q=0$이 정수근을 갖지 않는다는 말이다.

이상을 요약하면 다음과 같은 그림으로 나타낼 수 있다.



이제 이상과 같은 이해를 바탕으로 문제에 대한 답을 찾아 보자.

x^2+px가 4의 배수가 되려면 x는 짝수이어야 한다. 그렇다면 여기는 홀수인 경우를 가정해야 한다. x가 홀수일 때 $x^2+px-2q=0$일 수 없었다. 따라서 (나)의 답도 쉽다. (라)에도 (나)와 같은 것이 들어가야 한다. 따라서 $x^2+px-2q=0$을 변형한 것, 즉 $x^2+px=2q$을 골라낼 수 있다.

(증명)

x가 (가)이면 x^2은 (가)이고 $px-2q$는 짝수이다.

따라서 $x^2+px-2q$가 (가)가 되므로 (나)이 될 수 없다.

x가 (다)이면 x^2+px는 4의 배수이고 $2q$는 4의 배수가 아니다.

그런데 (라)이므로 모순이다. 따라서 이 방정식은 정수근을 갖지 않는다.

따라서 답은 "⑤ 홀수, 0, 짝수, $x^2+px=2q$"이다.

<긴가민가 한 학생들을 위하여>

" $x^2+px-2q=0$의 x가 정수일 때 $x^2+px-2q=0$가 성립하지 않는다는 말이 모순이라는 것이 금방 어지럽게 들릴지 모른다. 비유를 해 보자. 철수가 무엇인가를 냉장고에서 꺼내어 먹었는데 사과와 떡 밖에 없다. 초콜렛을 안먹었다고

가정한다면 철수는 아무것도 안먹은 셈이 된다. 처음에 철수가 무엇인가를 '먹었다'라고 얘기했는데 '아무것도 안먹었다"라는 말이 나온다. 그래서 모순(엉터리)이다. 마찬가지로 "' $x^2+px-2q=0$의' x"라고 했는데 $x^2+px-2q\neq0$가 된다는 것도 이와 같다.

어떻게 증명의 출발점을 설정하는가?

증명은 수학의 핵심이다. 대학교에서부터는 전문적인 수학공부가 모두 증명을 이해하는 것이다. 수학을 응용하는 분야에서만 문제를 풀고 계산을 한다.

계산하는 문제를 푸는 것은 정해져 있는 길을 가는 것과 같다. 증명을 하는 것은 아무 것도 없는 들판에 길을 만드는 것과 같다. 같은 것을 여러 가지로 증명할 수 있는 경우가 많고 어떤 것은 당연해 보이더라도 증명하기가 어려운 경우는 매우 많다.

계산 문제는 그 마지막 답을 모르고서도 처음 몇발자국을 기계적으로 풀어볼 수 있다. 하지만 증명은 시작부터 그 마지막을 생각하지 않으면 아무것도 할 수 없다. 방금 <문제19>에서 우리는 그것을 확인해 보았다. 그리고 또 다음의 <문제20>에서도 확인하게 될 것이다.

그러면 어떻게 증명의 마지막을 알 수 있는가?

증명의 시작도 잘 모르는데 어떻게 마지막을 안단 말인가? 증명을 하는 사람은 증명의 마지막과 시작뿐만 아니라 그 중간 과정도 모두 한꺼번에 '생각하게' 된다. 처음부터 알지 않는다. 그리고는 자기의 생각이 맞는지 하나하나 따져보고 계산도 해 본다. 처음부터 생각이 잘 맞아 떨어지는 것은 어려운 일이다. 때문에 몇번 실 패하는 경우가 많다. 그렇게 시행착오를 거치면서 여러가지 생각을 하게 되고 어떤 것이 전혀 안되는지를 가려내게 된다. 그러다가 제대로 된 증명방법을 찾아내게 된다. 처음부터 끝까지를 한꺼번에 생각을 함으로써 가능하다.

이것을 너무 어렵게 생각할 필요는 없다. 건축가가 집을 지을 때 첫 벽돌을 어떻게 쌓는가? 집 전체의 설계도를 그릴 때 첫번째 선을 어떻게 긋는가? 집 전체의 모양을 생각하면서 첫번째 선을 긋고 첫 벽돌을 쌓는다. 증명은 건축물을 설계하는 것과 같다.

따라서 수학은 건축만큼이나 무엇인가를 새로이 만들어 내는 것, 그래서 창조적인 것이다.

이것을 이해하지 못하고 주어진 길을 기계적으로만 따르려 한다면 증명이 무한정 어렵게 보이겠지만 이것을 이해하고 즐긴다면 수학은 무궁무진하게 재미있을 수 있다.

여전히 무언가 이해 못한 부분이 있는 것 같은 학생은 계속 다음의 <문제20>을 보자. <문제20>에서는 같은 설명을 다른 표현을 통해서 제시할 것이다. 그리고 나서도 이해가 안되면 그 때 다시 귀류법 설명 전체를 보는 것이 좋다.

증명 문제 하나 더

<<고등학생들에게 제시되는 증명의 문제들은 크게 두가지로 나뉜다.

하나는 수식의 진행을 제대로 생각해낼 수 있는가 하는 것을 검사하는 문제이고 다른 하나는 증명의 토대가 되는 논리적인 사고력을 갖추고 있는가 하는 것을 확인하는 문제이다. 첫번째 유형의 문제는 직접증명법 문제로 나타나며 그 내용은 수식을 기계적으로 풀어나가는 내용이다. 예를 들자면 2차 방정식의 근의 공식을 증명하는 것이 그것이다. 두번째 유형의 문제가 전형적인 증명문제이고 특히 귀류법을 사용하는 증명문제를 통해서 나타난다. 귀류법은 일단 생각해야 하는 것이 직접 증명법보다 복잡하지 않는가.>>

<문제20> 집합 P는 실수 전체의 집합의 부분집합으로서 다음 성질 (A)와 (B)를 갖는다.

(A) 임의의 실수 a에 대하여

$$a \in P, \quad a \in 0, \quad -a \in P$$

중 적어도 하나는 성립하지만, 두 가지 이상은 동시에 성립하지 않는다.

(B) $a \in P$이고 $b \in P$이면 $ab \in P$이다.

다음은 위의 성질을 이용하여 ‘$a \in P$이면 $\frac{1}{a} \in P$이다.’를 증명한 것이다.

(증명) 가정에서 $a \in P$이므로 (A)에 의해 $a \neq 0$이다.

따라서, 실수 $\frac{1}{a}$은 0이 아니므로 $\boxed{\text{(가)}}$에 의하여

$\frac{1}{a} \in P$ 또는 $-\frac{1}{a} \in P$이다.

$-\frac{1}{a} \in P$인 경우에는 $\boxed{\text{(나)}}$와 가정에 의하여 $-1 = a \times \left(-\frac{1}{a}\right) \in P$이다.

그런데, $-1 \in P$라면 (B)에 의하여

$1 = (-1) \times (-1) \in P$가 되어 $\boxed{\text{(다)}}$에 모순이다.

따라서, $\frac{1}{a} \in P$이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① (A), (B), (A) ② (A), (B), (B) ③ (B), (A), (A)

④ (A), (A), (B) ⑤ (B), (A), (B)

이 문제는 94년도 대입 수능 문제로 출제되었던 문제이다.

역시 귀류법을 통해서 증명하는 문제이다.

증명해야 할 것, 그래서 처음에 부정해 보아야 할 것은 무엇인가? ‘$a \in P$이면 $\frac{1}{a} \in P$이다.’라는 명제이다. 이것은 틀림없이 참이거나 거짓이거나 둘 중의 하나이다. 거짓이라고 해 보자. 그러면 ‘$a \in P$이어도 $\frac{1}{a} \notin P$이다.’가 된다. 이랬을 때 말이 안되면 이 명제는 참일 수밖에 없을 것이다.(거짓이 아니면 참이라고 했으니까.)

이 부정명제가 말이 안된다는 것을 어떻게 보이는가?

증명해야 할 명제를 충분히 이해하면 '$a \in P$이면 $\frac{1}{a} \in P$이다.'라는 명제만이 따로 떨어져 있지 않다는 것을 알 수 있다. 즉 조건 (A)와 (B)가 모두 성립할 때 이 명제가 성립한다는 얼개로 되어 있다. 그런데 '$a \in P$이어도 $\frac{1}{a} \notin P$이다'라고 했더니 그 받침돌인 (A)나 (B)가 무너져 버린다면 어떻게 될까? 그것은 어떤 나무더미 위에 올라서서 자기가 발 밑에 있는 나무를 치우는 것과 같을 것이다. 즉 엉망이 되고 모순이 생길 것이다. (그렇게 되면 거짓이라는 것이 엉터리임이 증명된다.)

이제 이것을 자세히 증명해 보자.

부정 명제의 가정에서 $a \in P$라고 했으므로 (A)의 조건을 생각하면 $a \neq 0$이 된다. a가 0이 아니면 $\frac{1}{a}$도 0이 아니게 되므로 $\frac{1}{a}$ 역시 세 경우 중에 한 경우에 속해야 하고 결국 $\frac{1}{a} \in P$이거나 혹은 $-\frac{1}{a} \in P$이다. 이제 이 두 경우에 대해 각각 생각해 보자.

<문제20 정리>

(A) 임의의 실수 a에 대하여

$$a \in P, \quad a \in 0, \quad -a \in P$$

중 적어도 하나는 성립하지만, 두 가지 이상은 동시에 성립하지 않는다.

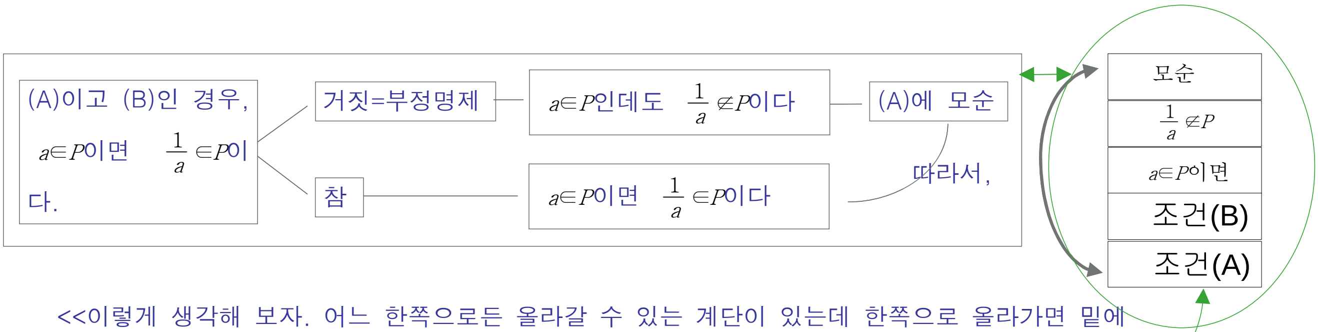
(B) $a \in P$이고 $b \in P$이면 $ab \in P$이다.

다음은 위의 성질을 이용하여 '$a \in P$이면 $\frac{1}{a} \in P$이다.'를 증명한 것이다.

$-\frac{1}{a} \in P$인 경우에, 어떤 것이 둘 다 P에 속하면 그 곱도 P에 속하는데 $a \in P$(가정)이므로 $-1 = a \times (-\frac{1}{a}) \in P$이다. 그런데, $-1 \in P$라면 P에 속하는 두개를 곱할 경우 그 곱도 P에 속하므로 $1 = (-1) \times (-1) \in P$가 된다. 그런데 이렇게 되면 $-1 \in P$이면서 동시에 $1 \in P$가 되었다. 즉 양수도 음수도 모두 P의 원소이다. 그런데 (A)에 따르면 어떤 수의 양수든 음수든 하나만 P에 속한다고 했으므로 엉터리가 된다. 즉 (A)에 모순이다.

$-\frac{1}{a} \in P$이 아니라면 $\frac{1}{a} \in P$라고 했다. 그래서 '$a \in P$이면 $\frac{1}{a} \in P$이다'가 증명되었다.

이상의 내용을 그림으로 요약하면 다음과 같다. (학생들은 이 그림을 머리 속에 그리면서 증명을 해야만 한다.)



<<이렇게 생각해 보자. 어느 한쪽으로든 올라갈 수 있는 계단이 있는데 한쪽으로 올라가면 밑에 있던 계단이 무너지게 되어 있다. 그렇다면 다른 쪽으로 올라갈 수 있을 것임이 틀림없다. 이 그림이 의미하는 것은 다음과 같다. 밑에서부터 하나하나 딛고 올라서서 맨 위의 계단에 도달해 보니까 그 밑에 있던 계단이 없어졌더라(혹은 무너지더라)는 것.(모순)>>

이제 <문제20>의 답을 찾아보자.

$a \in P$라고 할 때 $a \neq 0$이 되고 실수 $\frac{1}{a}$도 $\frac{1}{a} \in P$이거나 $-\frac{1}{a} \in P$가 되는 까닭은 조건 (A) 때문이다. $-\frac{1}{a} \in P$인 경우에, $-1 = a \times \left(-\frac{1}{a}\right) \in P$가 되는 까닭은 명제의 가정에서 $a \in P$이라고 했고 조건 (B)가 있기 때문이다.

어떤 것이 둘 다 P에 속하면 그 곱도 P에 속하는데 $1 \in P$이고 동시에 $-1 \in P$이기도 하다. 따라서 조건 (A)에 모순된다.

그러므로 ‘$a \in P$이면 $\frac{1}{a} \in P$이다’라는 명제가 거짓이란 말이 엉터리로 드러났다.

(A) 임의의 실수 a에 대하여

$a \in P$, $a \in 0$, $-a \in P$

중 적어도 하나는 성립하지만, 두 가지 이상은 동시에 성립하지 않는다.

(B) $a \in P$이고 $b \in P$이면 $ab \in P$이다.

다음은 위의 성질을 이용하여 ‘$a \in P$이면 $\frac{1}{a} \in P$이다.’를 증명한 것이다.

<증명>

가정에서 $a \in P$이므로 (A)에 의해 $a \neq 0$이다.

따라서, 실수 $\frac{1}{a}$은 0이 아니므로 $\boxed{(가)}$에 의하여

$\frac{1}{a} \in P$ 또는 $-\frac{1}{a} \in P$이다.

$-\frac{1}{a} \in P$인 경우에는 $\boxed{(나)}$와 가정에 의하여

$-1 = a \times \left(-\frac{1}{a}\right) \in P$이다.

그런데, $-1 \in P$라면 (B)에 의하여

$1 = (-1) \times (-1) \in P$가 되어 $\boxed{(다)}$에 모순이다.

따라서, $\frac{1}{a} \in P$이다.