망치로 두드린다는 생각만으로 무너지는 벽

앞에서는 ‘이면(→)’의 뜻과 관련해서 두가지를 설명하였다.

하나는 명제의 연산규칙 ‘이면(→)’은 집합의 연산규칙 ‘부분집합(⊂)’과 대응된다는 것이었고 다른 하나는 그것의 의미를 계약할 때의 상황에서 이해하면 좀더 합당하게 보인다는 것이었다.

하지만 집합에서 부분집합 개념이 가지는 의미보다 명제에서 ‘이면’이 가지는 의미는 조금 더 중요하다. 그 까닭은 2가지 측면에서 설명할 수 있다.

[1] 첫번째 까닭은 , 우선 일상적인 사람의 추론에서 ‘이면’이란 말이 많이 쓰인다는 것이다.

수학에서는 그 ‘이면’이라는 말의 뜻을 엄격하고 분명하게 해서 사용하고 있다. 일상적인 추론의 대표적인 경우가 바로 ‘3단논법’이다. 예를 들어서,

비가 오면 나는 영화를 보겠다. ($p \to q$)
비가 온다. (p)
그러므로 나는 영화를 보겠다. (q)

와 같은 것이 3단논법의 예이다. 여기서 가장 핵심적인 문장은 $p \to q$ 형식의 문장인 “비가 오면 나는 영화를 보겠다”라는 문장이다. 이것을 조건문이라고 한다.

“p이면 q이다”라는 형식의 문장이 조건문인데 여기서 p는 가정, q는 결론이 된다. 이 때 조건문 자체는 명제일까 조건일까? 물론 명제이다. “조건문”이라는 이름에 “조건”이라는 글자가 들어있다고 해서 조건문을 조건으로 착각하면 안된다. 붕어빵에는 붕어가 들어있지 않다. 조건문을 “조건문”이라고 부르는 까닭은 그 명제가 조건의 느낌을 주기 때문일 뿐이다.

[2] 두번째 이유는, 수학뿐만이 아니라 모든 과학의 핵심을 이루는, 이른바 ‘법칙’이라는 것이 모두 이러한 조건문의 형식으로 이루어진다는 것이다.

예를 들어서 자연과학을 보자.

화학의 아주 간단한 법칙인, “유리병 속에 이산화망간과 과산화수소를 섞으면 산소가 발생한다”라는 법칙을 보자.(이것은 국민학교 5-6학년 자연 시간에 배우는 화학 실험이다.) 이 말에서 “섞으면”이라는 말에 ‘이면(→)’의 뜻이 포함되어 있다. 생물학에서도 “열성 유전자와 우성 유전자를 교배시키면 우성 형질이 발현된다”와 같은 법칙을 배운다. 이런 예를 또 많이 들 수 있겠지만 다음과 같이 생각해 보면 자연과학에서 법칙이 매우 중요하다는 것을 알 수 있다. 즉, 결국 우리는 과학을 배워서 뭘 알고 싶어하는가? 이렇게 하면 어떻게 되고 또 저렇게 하면 어떻게 되는가, (이 말을 뒤집어서) 어떻게 해야 이런 결과를 만들 수 있는가 하는 것을 알고자 하는 것이 아닌가? 그 법칙이 조건문이다.

이렇게 생각하면 왜 조건문이 앞에서 설명하였듯이 계약과 같은 의미, 그래서 조건이 거짓이라도 결

론이 참이면 전체가 참이 된다는 것인지를 이해할 수 있는 실마리를 얻을 수 있다.
그것은 여러가지 법칙(조건문)이 한꺼번에 필요하다는 것이다.

<여러 법칙이 한꺼번에 필요한 것과 조건문의 의미>

낡은 벽을 무너뜨리기 위한 방법을 찾는다고 생각해 보자.

"망치로 두드리면 벽은 무너진다"와 "불도우저로 밀면 벽은 무너진다"는 등의 여러가지 방법들을 생각할 수 있다. 그 때 잠시 벽은 놔두고 조건문을 생각해 보자. 조건문의 의미를 배우기 전에 생각하듯이 "망치로 두드리면 벽은 무너진다"라는 말이 옳은 경우 "망치로 두드리지 않으면 벽이 무너지지 않아야" 한다면 불도우저로 밀어도 벽이 무너지지 않아야 한다. 무슨 말이냐 하면 망치로 두드리는 것만이 벽을 무너뜨리는 유일한 방법이어야 한다. 하지만 이것은 아무래도 불합리해 보인다.

결국 "망치로 두드리면 벽은 무너진다"는 말은 망치로 두드리지 않아도 벽이 무너질 수 있다는 것을 의미해야 한다. 즉 벽이 무너질 수 있는 다른 방법도 있을 수 있음을 같이 의미해야 한다. 그래서 이 말은 곧 "망치로 두드리면 벽은 무너지며 다른 경우에 벽이 무너져도 된다"는 것을 뜻해야 하는 것이다.

이상의 설명을 이해한다고 해서 처음에 무너뜨리려고 했던 낡은 벽은 무너지지 않겠지만 마음 속의 벽 하나가 무너지고 명제의 역·이·대우 관계가 보이기 시작한다.

<대우 명제의 참 거짓에 대한 예비 설명>

다시 망치와 낡은 벽을 생각해 보자. 반복하자면 "망치로 두드리면 벽은 무너진다"는 말은 "망치로 두드리면 벽은 무너지며 다른 경우에 벽이 무너져도 된다"는 것을 뜻해야 한다. 이 말을 달리 표현하면 이렇게 말할 수 있다. 즉

"벽이 무너지지 않았다면 망치로 두드리지는 것이나 어떤 다른 방법을 활용하지 않았다"

라고. 군더더기를 빼고 말하면 다음과 같다.

"벽이 무너지지 않았다면 망치로 두드리지도 않았다."

왜냐하면 망치로 두드렸다면 벽이 무너졌을 테니까.

한편 그 반대는 어떠한가? 벽이 무너지지 않은 경우에는 항상 망치로 두드리지 않았어야 한다면 망치로 두드릴 경우에 항상 벽은 무너지는가? 다른 예를 들어서 생각하면, 내가 배가 고픈 경우에 그것은 내가 밥을 안 먹었기 때문이라면(내가 배가 부르지 않다면 나는 밥을 먹지 않았다) 내가 밥을 먹으면 항상 배가 부르게 되는가? 확실히 그렇다. 따라서 벽이 무너지지 않으면 망치로 두드리지 않았다-가 옳다면, 망치로 두드리면 벽이 무너진다는 것도 옳다.

많은 경우에 학생들이 명제 단원에서 헷갈리고 그럴 것 같다는 느낌을 받지 못하는 까닭이 표현을 너무나 기계적으로 해서 생각하기 때문이다. 예를 들어서 "벽이 무너지지 않은 경우에는 항상 망치로 두드리지 않았어야 한다면 망치로 두드릴 경우에 항상 벽은 무너진다"는 말은 그럴 듯하게 들리는데 "'벽이 무너지지 않는다면 망치로 두드리지 않는다' 라면 '망치로 두드리면 벽은 무너진다'이다"라는 말은 정말 긴가민가하다.

역.이.대우명제

이상의 내용을 기호로 정리해 보면 다음과 같다.

"p = 망치로 벽을 두드린다" 이고 "q = 벽이 무너진다" 일 때 "망치로 두드리면 벽이 무너진다"

는 “p→q"로, “벽이 무너지지 않았다면 망치로 두드리지도 않았다” 는 “~q→~p"로 변한다. 즉

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow {\sim}q \rightarrow {\sim}p$$

이것이 의미하는 바는 어떤 명제와 명제의 대우 명제는 항상 같이 성립한다.

“망치로 두드리면 벽이 무너진다” 고 하더라도 “망치로 두드리지 않는다면 벽이 무너지지 않는다” 라고 말할 수 없다. 왜냐하면 망치로 두드리지 않더라도 불도우저로 밀거나 작은 폭탄으로 폭발시키는 등의 여러 가지 다른 방법이 있을 수 있기 때문이다. “망치로 두드리지 않는다면 벽이 무너지지 않는다” 는 말은 무엇을 나타내는가? 이것은 어떤 명제의 이명제를 나타낸다.

한편 역명제라는 것은 원래 명제의 가정과 결론을 바꾼 것을 말한다. 즉 “망치로 벽을 두드리면 벽이 무너진다” 의 역명제는 “벽이 무너지면 망치로 벽을 두드렸다” 이다. 이 역명제 역시 원래 명제가 옳다고 하더라도 항상 옳다고 할 수는 없다. 왜냐하면 벽이 무너졌더라도 망치가 아닌 불도우저를 썼을 수 있기 때문이다.

망치가 아닌 불도우저나 폭탄 등의 다른 방법을 썼을 수도 있다…는 말이 어쩐지 두어번 반복된 듯한 느낌이 들지 않는가? 실제로 이명제의 뜻과 역명제의 뜻을 설명하면서 반복되었다. 왜냐하면 역명제와 이명제는 서로 같은 뜻이기 때문이다. 이명제의 대우 명제가 역명제가 된다.

<<여기서 ‘이명제’의 ‘이(異)’ 자는 ‘다른’이라는 뜻을, 그리고 ‘역명제’의 ‘역(逆)’ 자는 ‘거꾸로’라는 뜻을 나타낸다. 이명제는 원래 명제의 부분들을 부정해서 ‘다른’ 명제로 만들었기 때문이고 역명제는 원래 명제의 가정에서 결론으로 가는 순서를 거꾸로 썼기 때문에 이런 이름이 붙은 것 같다.>>

그런데 “여자가 아니라면 남자이다”라는 명제에 대해서 생각해 보자.

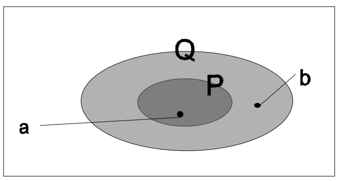
이 명제의 이명제는 어떤가? “여자라면 남자가 아니다”이다. 한편 역명제는 어떤가? “남자라면 여자가 아니다”이다. 어, 이명제와 역명제의 참 거짓이 원래 명제와 똑같잖아?…라고 생각하는 학생들이 많지는 않겠지만 아주 가끔씩 있는 것 같다. 이런 궁금증을 가진 학생들은 다음의 두가지를 알아야 한다.

첫째, 수학에서 “어떤 것이 참이다”라는 말은 실제로 “항상 참이다”의 ‘항상’이 생략된 말이다. 처음에 했던 설명을 기억해 보자. 수학에서는 확실한 것을 추구하며 그것이 중요하다. 그래서 가끔은 참이고 가끔은 거짓인 것을 “참이 아니다”라고 한다. 이 말은 “(항상) 거짓이다”라는 말과는 다르다.(부정을 생각하라.)

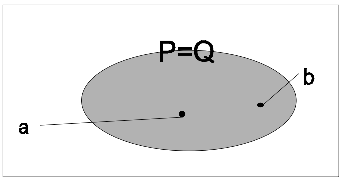
둘째, 그러면 어떤 경우에 한 명제의 이명제나 역명제가 똑같이 참이거나 거짓이 되는가? 그것은 p이면 q이고 또 다르게 q인 경우가 없을 때 그러하다. 앞의 문장을 보자. 여자가 아니라면 남자이다. 그러면 가정인 ‘여자가 아닌’ 경우 말고도 ‘남자인’ 경우가 또 있는가? 없다. 이런 경우에만 이명제와 역명제가 원래 명제의 참 거짓과 같아진다. 하지만 망치로 벽을 두드리는 경우에는 망치로 두드리지 않아도 벽이 무너지는 경우가 얼마든지 있다. 이런 경우에는 이명제와 역명제가 원래 명제와 뜻이 서로 다르게 된다.

이것을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

즉, 앞에서 설명하였듯이 집합으로 표현해 볼 때, 일반적인 p → q이다가



라는 그림과 같은 형태라면 이명제나 역명제의 참 거짓이 원래 명제와 항상 같은 경우는,



와 같이 되는 것이다.

이상의 내용을 종합하면 교과서나 다른 참고서에서 흔히 보는 다음과 같은 그림으로 정리된다.

$\sim q \rightarrow \sim p$	← 역 →	$\sim p \rightarrow \sim q$
↑ 이 ↓	↖ ↗ 대우 ↙ ↘	↑ 역 ↓
$q \rightarrow p$	← 역 →	$p \rightarrow q$

<문제14> 다음 명제의 역, 이, 대우를 쓰고 각각의 참과 거짓을 말하여라.

$x \geq 2$이고, $y \geq 2$이면, $x+y \geq 4$이다. (단, x, y는 실수)

이 문제를 해결하는 것은 명제의 역·이·대우를 알고 부정을 알면 간단하다.

이 명제의 가정은 “ $x \geq 2$이고, $y \geq 2$” 이고, 결론은 “ $x+y \geq 4$” 이다. 그렇다면 가정의 부정은 “ $x<2$ 이거나 $y<2$” 이고 결론의 부정은 “ $x+y<4$” 이다. 따라서 역명제, 이명제, 대우명제와 그 참 거짓은 다음과 같다.

역명제 : $x+y \geq 4$이면 $x \geq 2$이고, $y \geq 2$이다. <거짓>

이명제 : $x<2$이거나 $y<2$이면 $x+y<4$이다. <거짓>

대우명제 : $x+y<4$이면 $x<2$이거나 $y<2$이다. <참>

어려운 문제와 쉬운 문제 : 종이 한 장의 차이

방금 풀어 본 <문제14>는 어려운 문제가 아니다. 대부분의 학생들이 그렇게 느낄 것이고 별로 어렵지 않게 풀 수 있을 것이다. 그리고 문제집이나 시험에서 자주 보는 명제 단원의 문제들도 역시 그렇게 어렵지가 않다.

그러면, 고작 그렇게 어렵지도 않은 문제들을 풀 수 있기 위해서 그토록 긴 설명을 해 왔단 말인가? 그런 불만을 가진 학생들은 다음의 <문제15>를 풀어 보고 나서 생각해 보자.

<문제15> 실수 전체의 집합의 부분집합 A가 다음 조건을 만족시킨다.

$x \in A$ 이면 $\frac{1}{2}x \in A$이다.

다음 중 항상 옳은 것은?

① $\sqrt{2} \in A$이면 $0 \not\in A$이다.
② A가 유한집합이면 $2 \not\in A$이다.
③ A가 무한집합이면 $0 \in A$이다.
④ $x \in A$이고 $y \in A$이면 $x+y \in A$이다.
⑤ $x \in A$이고 $y \in A$이면 $xy \in A$이다.

이 문제는 94년도 대입 수능 문제로 출제되었던 문제이다. 어떤가? 이 문제도 <문제14>만큼 쉬운가? 아마 대부분의 학생들에게 이 문제가 그리 쉽게 느껴지지만은 않을 것이다.

평범한 방식으로 이 문제를 생각해 보자.

"$x \in A$ 이면 $\frac{1}{2}x \in A$"라는 말은 무엇을 나타내는가? 즉 어떤 수가 A에 속하면 그 수의 반쪽도 A에 속한다는 말이다. 그러면 다시 그 반쪽짜리 수도 A에 속하면 반의 반쪽짜리도 A에 속할 것이고 이렇게 계속하면 어떤 수를 수없이 많이 2로 나눈 수도 A에 속한다는 말이다. 이렇게 정리하고 보기를 보자.

①을 보면 $\sqrt{2}$가 A에 속하면 0은 A에 속하지 않는다고 하는데… $\sqrt{2}$를 계속 2로 나누고 또 나누어 나가면 그 수는 너무너무 작아져서 0에 수렴할 것이다.(이런 생각은 극한을 배운 학생들이 할 것이다.) 하지만 아무리 작아져도 그 수는 결국 0이 아니지 않는가? 따라서 $\sqrt{2}$가 A에 속한다는 사실에서 0이 A에 속한다는 사실이 나오지는 않는다. 이렇게 생각하면 ① "$\sqrt{2} \in A$이면 $0 \not\in A$이다"는 옳은 것 같다. 뭔가 조금 미심쩍기는 하지만.

그러면 ②는 어떤가? A가 유한집합이면 $2 \not\in A$이라고? …갑자기 어려워지네? 그렇다면 일단 다른 보기들부터 먼저 보기로 하자. ③은 어떤가? A가 무한집합이면 $0 \in A$이라… 점점 더 어려워지네.

하지만 이렇게 복잡한 문제가 지금까지 설명해 온 명제 단원의 지식들을 활용하면 한결 쉬워진다.

① "$\sqrt{2} \in A$이면 $0 \not\in A$이다"를 보자. 앞에서 생각해 본 것처럼 생각하면 $\sqrt{2}$를 시작점으로 해서 그 수를 2로 나눈, 점점 작은 수들이 A에 계속 속하게 된다. 그리고 보기 ①은 오직 그것만을 말해 준다. 다른 것은 확실하지 않다. 그 확실하지 않은 것 중에 0이 A에 속하는가 그렇지 않는가도 포함된다.

앞에서 '어떤 것이 참이다'라는 말은 그것이 항상 참이라는 것을 말한다고 설명했다. 그것을 좀더 강조하면 그것은 확실하게 옳은 것을 말한다. 수학은 확실한 것을 추구한다. 그리고, 어쨌든 문제에서도 항상 옳은 것을 물었다. 보기 ①은 항상 옳지는 않다.

② "A가 유한집합이면 $2 \not\in A$이다"를 보자. 이 명제는 말 그대로 생각하면 굉장히 어렵다. 하지만 정말 백지 한 장의 차이라는 말이 실감날 정도로, 이 명제를 대우명제로 바꿔보면 생각하기가 훨씬 쉽다. 즉 ② "A가 유한집합이면 $2 \not\in A$이다"의 대우명제는 "$2 \in A$이면 A가 무한집합이다"가 된다.

이젠 어떤가? 2가 A에 속하면 1도 A에 속하고 다시 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ …이 끊임없이 A에 속하게

된다. 따라서 A의 원소는 무한히 많게 된다. 즉 A는 무한집합이 되는 것이다. 그러므로 보기 ②는 항상 옳다. 그래서 답은 2번.

③ “A가 무한집합이면 $0 \in A$이다”는 보기 ①과 ②를 생각하고 나면 쉽다.

A의 원소가 어떤 수이든 거기에는 2로 나누어서 다른 수가 되는 숫자가 하나만 포함되어 있으면 자동적으로 무한집합이 된다. 따라서 1이나 2, $\sqrt{3}$ 등 갖가지 수들이 최소한 하나만 A에 포함되면 A는 무한집합이 되는 것이다. 그러면 2로 나누어도 다른 숫자가 되지 않는 수가 있는가? 단 하나가 있는데 그 숫자가 0이다. 왜냐하면 0은 2로 나누어도 0이고 또 나누어도 0이기 때문이다. 물론 3으로 나누어도 0이다.

따라서 A가 무한집합이면 0은 A에 포함되지 않는다…라고 생각하면 안된다. 0은 A에 포함될 수도 있고 포함되지 않을 수도 있다. 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ …이 A의 원소이면 당연히 무한집합이 되는데 거기에 0이 하나 더 포함되어 있어도 여전히 무한집합이 된다. (이 부분에서 보기 ①을 생각했던 사고가 작용해야 한다.) 따라서 보기 ③도 확실히 옳지는 않다.

이젠 ④ “$x \in A$이고 $y \in A$이면 $x+y \in A$이다”에 대해서 생각해 볼 차례이다.

문제인 “$x \in A$ 이면 $\frac{1}{2}x \in A$”라는 말의 뜻을 생각해 보자. 그러면 일단 어떤 수가 A에 속하면 그보다 작은 수들이 무한히 많이 A에 속하게 됨을 알 수 있다. 1이 A의 원소이면 1보다 작은 수들이 A에 속하고 3이 A의 원소이면 역시 3보다 작은 수들이 A에 속한다. 그보다 작은 수들만. 그렇다면 두 수를 더한 수(예를 들어서, 1+3=4와 같은 수), 그래서 원래 수(1이나 3)보다 큰 수가 A에 속하는지는 알 수 없다. 일단 보기 ④에 나타난 말만 가지고는 속하지 않는 것 같다. 물론 이것도 확실하지 않다. 하지만 $x+y$가 A에 속한다는 말이 항상 옳지 않다는 것은 확실하다.(지금은 항상 옳은 것을 찾고 있다.) 따라서 보기 ④도 답이 아니다.

마지막으로 보기 ⑤ “$x \in A$이고 $y \in A$이면 $xy \in A$이다”를 보자.

x도 1이고 y도 1이라면 xy=1이 되여 A에 속할 것이다. 하지만 명제를 충분히 배운 학생이라면 이렇게 한두 개쯤 적절한 예가 있다고 어떤 명제가 참이 되지는 않는다는 것을 알 것이다. 항상 옳기 위해서는 예외가 없어야 하는 것이다. 그러므로 예외가 되는 것을 찾아보아야 한다.

일단 x와 y가 3이나 4, 혹은 5같은 숫자라면 두 수를 곱한 값은 각각의 숫자보다 커지므로 보기 ④와 같은 이유로 A에 속하지 않을 것이다. 즉 $x=3$이고 $y=5$라고 할 때 이 조건문의 가정에서는 3이나 5보다 큰 수가 A에 속하는지를 말해주지 않는다. 즉 $xy=15$와 같은 수는 항상 A의 원소가 되지는 않는다. 따라서 보기 ⑤도 항상 옳지는 않다.

아직 설명되지 않은 것, 그리고 가장 어려운 것.

이상의 설명을 살펴 보면 보기 ①과 ②가 해결되면 ③이 쉽게 해결되고 보기 ④가 해결되면 ⑤도 비슷하게 해결된다는 것을 알 수 있다. 그런데 보기 ①이 어렵게 보인다면 그것은 “항상 옳다”라는 말을 잘 적용시켜서 생각하지 못하기 때문이다. 보기 ②도 어렵게 보이는데 이렇게 헷갈리고 단순하게 판

단하기 어려운 명제에 대해서는 대우명제로 바꿔서 생각해 보면 훨씬 쉬워지는 경우가 많다.

바로 이 점에서 명제 단원의 지식이 굉장히 쓸모있게 되는 것이다. 즉 복잡하거나 애매한 것을 분명하고 쉽게 생각할 수 있도록 하는 도구를 마련하는 것, 그것이 명제 단원에서 배워야 할 가장 중요한 것이다.

한편 보기 ④와 ⑤를 해결하기 위한 추가적인 판단력은 특별히 명제단원에서 오는 것이 아니라 수학적인 사고 방식에 익숙해야만 하고 차분하고 냉정하게 생각하는 버릇을 가져야만 얻을 수 있는 것이다.

많은 학생들이 이 정도 설명을 들으면 <문제15>에 대해서 충분히 이해했다고 생각하고 돌아설 것이다. 하지만 고등학교 수학을 처음 배우는 학생들은 뭔가 미심쩍은 느낌을 가지게 될 것이다. 무언지 모르지만 충분히 설명이 다 되지는 않은 듯한 느낌.

만약 그런 느낌을 갖는 학생이 있다면 그 학생은 자신이 모르거나 자신없는 부분을 느끼는 것이다. 다른 학생들은 훨씬 더 수학 문제를 잘 풀 수 있기 때문에 그런 느낌을 갖지 않는 것이 아니라 대부분의 경우에 완전히 설명을 다 듣지 못하는 데에 익숙해져 있어서 그러한 미심쩍은 느낌에 익숙해 있기 때문에 마음이 가벼울 수 있다.

그러면 <문제15>에 있어서 아직 설명되지 않은 것은 무엇인가?

그것은 <문제15>를 설명하면서 처음에 당연히 모든 학생들이 생각할 수 있는 것처럼 제시한 것에 숨어 있다. 즉 “ $x \in A$ 이면 $\frac{1}{2}x \in A$” 라는 말이 뜻하는 것은, 어떤 수가 A에 속하면 그 수의 반쪽도 A에 속하고 다시 그 반쪽 짜리 수도 A에 속하면 반의 반쪽 짜리도 A에 속할 것이고 이렇게 계속된다는 것, 그래서 예를 들어서 2가 A에 속하면 1도 A에 속하고 다시 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ …이 끊임없이 A에 속하게 된다는 것을 학생들이 쉽게 알 수 있는 것처럼 얘기했다. 하지만 실제로 그렇지는 않다.

실제로는 학생들이 바로 이 점, 즉 방금 설명한 것처럼 “ $x \in A$ 이면 $\frac{1}{2}x \in A$” 라는 말이 뜻하는 것이 무엇인가를 해석해 내지를 못해서 <문제15>를 풀지 못한다. 만약 이렇게 문제를 해석할 수 없는 학생이라면 그 보기들도 전혀 해석하지 못할 것이다. 학생들이 실제로 <문제15>를 해결할 수 있기 위해서는 이렇게 문제를 해석하는 능력을 길러야 한다.

그러면 이 능력을 어떻게 기르는가?

여기에 대해서는 수학의 어느 단원을 공부하라고 뾰족하게 대답해 줄 수는 없다. 이 능력은 수학 공부 전체 과정을 통해서 길러지는 것이다. <문제15>와 같은 경우에는 수의 성질(아무리 나누어도 작아지기만 할 뿐 결코 0이 되지는 않는다는 것)과 무한집합과 유한집합이 무엇인지 등을 함께 알아야 하며 비슷한 유형의 문제들도 한두 번쯤 풀어 보아야만 해결할 수 있다.

지금 내가 집합과 명제 단원이 중요하다는 설명을 하고 있기 때문에 집합과 명제를 열심히 공부하면 이러한 수학 명제의 의미를 해석할 수 있는 능력을 얻을 수 있다고 말하고 싶지만 냉정하게 생각해 보면 꼭 그렇지만도 않다.

문제를 잘 해석해 내기 위해서는 다음과 같이 공부를 해야 한다

[1] 첫째 수학의 표현이 갖는 독특성과 그 묘미를 이해하고 그것을 좋아하도록 해야 한다.

어떤 수가 A에 속하면 그 수의 반쪽도 A에 속하고 다시 그 반쪽 짜리 수도 A에 속하면 반의 반쪽 짜리도 A에 속할 것이고 이렇게 계속된다는 것, 그래서 예를 들어서 2가 A에 속하면 1도 A에 속하고 다시 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ …이 끊임없이 A에 속하게 된다.

이렇게 길게 말해야 하는 것을 이렇게 간단하고 분명하게 표현할 수 있다는 것은 정말 대단한 일이 아닐 수 없다. 왜 수식이나 명제, 집합 등과 같이 수학적인 표현을 사용하는가? 그것은 그것이 분명하면서도 동시에 아주 많은 말로 표현해야 할 것을 간단한 말로 줄일 수 있기 때문이다.

$x \in A$ 이면 $\frac{1}{2}x \in A$이다.

하지만 동시에, 어디에서나 긴 말을 짧게 줄여 놓으면 어려울 수밖에 없다. 수학의 표현이 그러한 것이다. <문제15>에서 가장 어려운 것, 즉 문제의 의미를 풀어내는 것은 수학적인 표현의 핵심에 익숙해지는 것이고 곧 수학 자체에 익숙해지는 것이다.

학생들이 이와 같은 수학적인 표현에 불평하게 되는 까닭은 수학을 단순히 숫자를 계산하는 것으로만 생각하기 때문이다. 하지만 수학은 모든 것을 논리적으로 분명하게, 그러면서도 풍부하게 생각할 수 있기 위해서 발전하고 있는 학문이다. 숫자에 국한되는 것이 아니다. 바로 수학의 핵심이 바로 이것이다.

[2] 둘째 수학의 각 단원들을 공부하되 문제를 외워서 빨리 푸는데 치중할 것이 아니라 문제를 스스로의 생각으로 해결하는 연습을 많이 해야만 한다.

그러면서 학생들은 수학적인 사고에 자신도 모르게 점차로 익숙해질 것이다. 거기에는 많은 시간이 투자되어야 한다. 그것을 대신할 수 있는 약은 없다.

[3] 세번째로는 수학 단원의 기초 분야인 집합과 명제, 수와 식의 갖가지 의미들을 자세히 이해하면 많은 도움이 된다.

왜냐하면 이 단원이 수학의 기초 분야로서 수학적인 사고력을 기르기 위한 내용을 문제삼기 때문이다.

그러기 위해서 계속 설명을 해 나가도록 하자.