DAG WESTERSTAHL 의 “Quantifiers in Formal and Natural Languages”에서, Mostowskian 양화사 개념에 대한 내용 정리.

Handbood of Philosophical Logic, Vol IV.

파깨비 정리(www.pakebi.com)

1.3 Mostowskian 양화사들(Quantifiers)

우리가 알다시피, 프레게의 작업은 현대 논리학의 초창기에 무시되었고, 특히 의미론에서 그가 성취한 엄밀함은 오래 동안 이해되지 못했다. 하지만 술어 논리의 언어는 매우 강력해서 튼튼한 의미론적 토대가 없이도 성공적일 수 있었다. 양화사의 역사에서는, 이 시기가 수학의 기초를 위한, 무한 논의영역들에 대한 양화의 역할에 대해서 논의하기에는 주로 흥미로운 시기이지만 이것은 여기서 주제거리가 아니다.

구문론과 의미론 사이를 수학적으로 날카롭게 구분하는 생각은 1920년대에 점차적으로 다시 나타나기 시작하였지만 1936년에 타르스키의 진리 정의 이전까지는 진리 개념(모형에서의)은 주목할만하지 않았다. 보편 양화 혹은 존재 양화된 식들에 대한 타르스키의 진리 조건들은 동시 범주적으로 ∀와 ∃를 다루었지만 여기서는 몇 가지 다른 양화사들을 시도하는 것, 즉 ∀와 ∃가 아닌 Q인,

$$Qx\psi$$

식을 고찰하는 것이 자연스럽다. 예를 들어서 $\exists_{\geq n}$과 $\exists_{=n}$을 위한 진리 조건들이 어떤 것이어야 하는가는 분명하다. 하지만 일반적인 개념을 얻기 위해서 우리는 Q를 동범주(syncategorically)가 아닌 방식으로 다루어야 한다. 즉 우리는 특정한 해석 영역들과 함께 **구문론적 범주** ‘양화사’를 가져야 한다. 그러한 일반 개념은 Mostowski[1957]에 나타났다.

타르스키가, 관계

$$\mathbb{M}\vDash\phi[g]$$

(g는 M에서 ϕ를 만족시킨다)를 정의하며, 여기서 M은 모형이고, g는 변항들에 대한 M의 원소들의 값할당이며, ϕ는 식이다. ϕ가 $\forall x\psi$이거나 $\exists x\psi$일 때, 이것은, 집합

$$\psi^{M,g,x}=\{a\in M:\mathbb{M}\vDash\psi[g(a/x)]\}$$

에 대한 어떤 조건으로서 표현될 수 있다. 따라서,

$$\mathbb{M}\vDash\forall x\psi[g]\leftrightarrow\psi^{M,g,x}=M,$$

$$\mathbb{M} \models \exists x\psi[g] \leftrightarrow \psi^{M,g,x} \neq \varnothing,$$
$$\mathbb{M} \models \exists_{\geqq n} x\psi[g] \leftrightarrow |\psi^{M,g,x}| \geqq n \ .$$

M의 부분집합에 대한 조건은 외연적으로, M의 부분집합들의 집합일 뿐이다. 그래서 Mostowski는 M에 대한 (국소:local)양화사를 M의 부분집합들의 집합이라고 정의하며, 이에 반해서, (전체:global) 양화사는 집합 M의 각각의 비공집합에, M에 대한 양화사 $\mathbb{Q}_M$을 할당하는 함수 $\mathbb{Q}$이다. 구문론적으로, 양화사 기호 Q는 $\mathbb{Q}$에 속하며, 따라서 $Qx\psi$는 식이며, 그 때 x는 변항이고 ψ는 식이며, 다음의 진리조건이 덧붙는다.

$$\mathbb{M} \models Qx\psi[g] \leftrightarrow \psi^{M,g,x} \in \mathbb{Q}_M \ .$$

그러한 양화사들의 예들은 다음과 같다.

$\forall_M = \{\mathbb{M}\}$
$\exists_M = \{X \subseteq M: X \neq \varnothing\}$
$(\exists_{\geqq n})_M = \{X \subseteq M: |X| \geqq n\}$,
$(\mathbb{Q}_x)_M = \{X \subseteq M: |X| \geqq \aleph_\alpha\}$, (순서수 양화사들)
$(\mathbb{Q}_C)_M = \{X \subseteq M: |X| = |M|\}$, (Chang 양화사들)
$(\mathbb{Q}_R)_M = \{X \subseteq M: |X| > |M - X|\}$ (Rescher의 복수성 양화사들)

이 모두는 다음의 조건을 만족시킨다.

ISOM 만약 f가 M에서 M'로의 1대1함수(bijection)라면, $X \in \mathbb{Q}_M \leftrightarrow f[X] \in \mathbb{Q}_{M'}$

사실, Mostowski는 ISOM을, 양화사들에 대한 조건을 정의함으로써 포함시켰고, “양화사들은 /M의/ 원소들을 서로 우리가 구분할 수 있도록 해서는 안된다”라는 요구사항을 표명했다. ([1957], p.13)