Robert Bull and Krister Segerberg. "Basic Modal Logic" in *Handbook of Philosophical Logic(II)*,

- 파깨비(www.pakebi.com) -

1. 역사적 부분

4. 모형이론적 전통(The Model Theoretic tradition)

만약 대수적 의미론을 평가절하한다면 Rudolf Carnap 이 양상 논리에 대한 의미론을 제공한 첫 번째 학자일 것이다. 시대적으로 위대한 업적들 세 개가 모두 그에게 다가왔다. 프레게 덕분에 의미론에 대한 그의 관심이 생겨났고, 더 구체적으로는 프레게로부터 내포와 외연을 구분하는 것을 배웠다. 그리고 그는 라이프니쯔에게서 필연성이 모든 가능 세계들에서 참으로 분석된다는 생각을 빌려왔다. 더욱이 그의 업적(Carnap [1942, 1947])의 부분에 대한 출발점을 형성한 몇몇 아이디어들은 비트겐슈타인에게서 얻은 것이다.

사태 기술(state-description)을 우리는 원자 명제들(propositional letters)의 집합으로 이해할 것이다. 만약 S가 사태 기술이라면, 우리는 식 A가 S에서 성립한다는 것이 의미하는 바를, 기호로는 $\vDash_S A$ 라고 쓰고 다음과 같이 말할 것이다.

$\vDash_S P$이기 위한 필요충분조건은, P가 원자 명제인 경우 $P \in S$,

$\vDash_S \neg A$이기 위한 필요충분조건은, $\vDash_S A$가 아니라는 것,

$\vDash_S A \wedge B$이기 위한 필요충분조건은, $\vDash_S A$이고 $\vDash_S B$라는 것,

$\vDash_S A \vee B$이기 위한 필요충분조건은, $\vDash_S A$이거나 $\vDash_S B$라는 것,

$\vDash_S A \rightarrow B$이기 위한 필요충분조건은, $\vDash_S A$인 경우 $\vDash_S B$라는 것.

만약 사태 기술의 명확한 집합(definite collection) C를 고려한다면, 다음의 조건들도 의미있을 것이다.

$\vDash_S \Box A$이기 위한 필요충분조건은, 모든 $T \in C$에 대해서 $\vDash_T A$라는 것,

$\vDash_S \Diamond A$이기 위한 필요충분조건은, 어떤 $T \in C$에 대해서 $\vDash_T A$라는 것.

어떤 식이 C에서 타당하기 위한 충분조건은 그 식이 C에서의 모든 사태 기술에서 성립한다는 것이며, 단순히 타당하기 위한 충분조건은, 모든 사태기술들의 집합에서 타당한 것이다. 이 정의로 인해서 모든 식들의 집합에서 잘 정의된 부분 집합 하나가 구체화된다. 매우 재미있게도, 이 부분집합은 루이스의 체계 <S5>의 테제들의 집합과 동일하다. 이것은 우연의 일치일까? 표면적으로는, <S5>에 대한 카르납의 특징화는 루이스에 기인하는 원래의 것과 매우 달라 보인다.

이것은 여전히 현대 양상 논리처럼 보이지는 않는다. 즉 가능 세계들이 빠진 것이다. 힌티카[1975]에 따르면 "카르납은 가능세계 의미론의 기본 관념에 극히 가깝게 도달했으며, 하지만 그것을 형식화하지

못했음은 명백하고, 스스로에게도 그 점에서 부족했다". 이것은 매우 섬세하게 구분하는 것이며, 적어도 명제 논리학의 수준에서는 그러하다. 카르납은 가능 세계들에 대해서 말한다. 그는, 필연적 참은 모든 가능세계들에서 성립하는 참이라는 라이프니쯔의 제안에 천착하고자 한다는 점을 제법 분명히 한다. 더욱이, 그의 사태 기술들이 가능세계들을 '표상한다'(represent)라고 말하며, 이는 곧 사태 기술이 가능세계의 (부분적) 기술들임을 나타내는 것으로 보인다. 따라서 형식적인 관점에서 (힌티카도 이 점에 동의하는데) 앞의 문단에서 나타나는 사태기술들의 집합 대신에 우리는 가능세계들의 집합도 마찬가지로 가지고 있을 수 있으며, 다만 "성립한다"(hold in)라는 정의의 첫 번째 구절을 다루는 방법을 찾을 수 있다는 조건에서 그러하다. 가능세계들에는 없는, 사태 기술의 한 가지 장점은, 주어진 원자 명제가 주어진 사태 기술에서 성립한다는 것이 무엇을 의미하는지가 즉시 분명하다는 점이다. 우리가 필요로 하는 것은 이러한 기능을 할 새로운 원초적인 요소이다. 이로 인해서 우리는 다음의 용어들에서 카르납의 의미론을 고쳐 쓰게 된다. 우리는 <U, V>를 카르납 모형이라고 부르며 여기서 U는 (가능세계들의) 어떤 집합이고, V(값할당)는 각각의 원자 명제 P와 가능세계 x에 진리값 $V(P,x)$를 할당하는 함수이고, 그 진리값은 T이거나 F이다. "성립한다"(holds at)의 정의에서 첫 번째 구절은 다음의 조건에 의해서 대치된다.

$\models_x P$이기 위한 필요충분조건은 $V(P,x)=T$, 단 P는 원자 명제.

다른 조건들도 이에 따라서 변한다. 특히 양상 식들과 관련된 조건들은 다음과 같이 된다.

$\models_x \Box A$이기 위한 필요충분조건은 $\forall y \in U \models_y A$
$\models_x \Diamond A$이기 위한 필요충분조건은 $\exists y \in U \models_y A$

여기에 카르납에서 더 발전된 것은 없지만, 이로 인해 우리는 현대적 용어법으로 진입한다. 여기서 주어진 카르납의 상이 창백한 것이며 그것은 그의 책에서의 많은 중요한 요소들이 술어 논리의 차원에서 발견되기 때문임을 언급해 둘 필요가 있다. 여기서는 그 부분들을 고려하지 않을 것이다.

의미론 전통 안에서 중요한 다음 단계는 Arthur Prior에 의해서 이루어졌다. Lewis와 카르납 모두 엄밀한 의미(strict sense)에서의 양상 개념들의 분석에 관련되었지만, 2절에서 언급한 것처럼, 몇몇 저자들은 역시 넓은 의미에서의 양상이라 불리는 개념들(imperative, doentic 등)을 모형화하려 했다. 그의 책 Prior[1957]에서 그는 시간을 자연수들의 집합 ω로 모형화한다. 따라서 카르납의 모형들 대신에 우리는 프라이어 모형들이라고 부를 수 있는 구조들 $\langle \omega, V \rangle$를 만나게 되며, 여기에서 카르납 모형 $\langle U, V \rangle$의 가능세계들의 비명시적인 집합 U는 시점들의 집합을 나타내는 특별한 집합 ω에 의해서 대체된다.

프라이어 모형들의 덕분에 많은 새로운 연산자들이 정의될 수 있다. Prior[1957]에서는 다음의 조건들에 의해서 정의되는 연산자들에 초점을 맞춘다.

$\models_t \Box A$이기 위한 필요충분조건은 $\forall u \geq t \models_u A$,
$\models_t \Diamond A$이기 위한 필요충분조건은 $\exists u \geq t \models_u A$.

나중에 Prior는 다음의 조건들에 의해서 정의되는 유관한 연산자들도 역시 고려할 것이다.

$\vDash_t \Box A$이기 위한 필요충분조건은 $\forall u > t \vDash_u A$,
$\vDash_t \Diamond A$이기 위한 필요충분조건은 $\exists u > t \vDash_u A$.

이렇게 정의가능한 새로운 연산자들은 거의 한정 없이 많다. Prior[1957]에서 이미 우리는 다음과 같은 조건들을 발견한다.

$\vDash_t \Box A$이기 위한 필요충분조건은 $\vDash_t A$이고 $\vDash_{t+1} A$,
$\vDash_t \Diamond A$이기 위한 필요충분조건은 $\vDash_t A$이거나 $\vDash_{t+1} A$

그리고 차후의 발전은 다른 사람들에 의해서 이루어졌다.

일단 Prior가 시제 논리를 어떻게 할 것인지를 보이자 많은 활동들이 뒤따랐다. 예를 들어서, 자연수들의 집합 ω가 모든 정수들의 집합 ζ에 의해서나, 유리수들의 집합 η 혹은 실수들의 집합 λ에 의해서 대체되는 그런 Prior 모형들을 연구하는 것은 자연스럽다. 많은 관심이 중복 양상 체계들에서의 몇 개의 시간적 연산자들과 다른 연산자들의 상호작용을 연구하는 데에 집중되었다. (시제 논리에 대한 좋은 많은 참고문헌들 중의 하나는 Rescher와 Urquhart[1971]이다.) Prior의 저작은 시제 관념에 대한 정확하나 정의가 최초로 제공된 Kamp[1968]로 가는 길을 열었다. 예를 들어서, Kamp에 따르면, 이산적 시간(discrete time)에서의 n 항 시제는 $(\zeta)^n$을 ζ에 대응시키는 함수 f이다. 즉 n 항 연산자 ☆는 이 시제를 표현하기 위한 충분조건은 다음과 같다. 모든 $t \in \zeta$에 대하여,

$\vDash_t ☆(A_0, \cdots, A_{n-1})$이기 위한 필요충분조건은 $t \in f(\{u \vDash_u A_0\}, \cdots, \{u \vDash_u A_{n-1}\})$

Kamp[1968]에서 시제 논리는 새로운 수준의 정교함을 이룬다. 하지만 초기의 많은 관심들은 더 기본적인 문제들, 예를 들어서 위에서 주어진 세 정의들 중의 첫 번째 것에 의해서 정의된 연산자들을 특징짓는 것에 관련된다. 이 논리학은 소위 Diodorean 논리학으로 불리는데, 힌티카, 더밋 그리고 다른 학자들에 의해서 지적되었듯이, <S5>만큼 강하지 않고 <S4>보다는 더 강하다. 그 참의 자기동일성은 최종적으로 S. A. Kripke와 R. A. Bull에 의해서 독립적으로 확립되었다.(Bull[1967]) 이에 대한 재미있는 설명으로는 Prior[1967]의 2장을 참조 바란다.

이 모든 것은 시제 논리의 장에서 정리되었다.(이 Handbook의 II.2장을 참조바람.) 여기서 중요한 것은 Prior가 카르납의 정렬되지 않은(unordered) 가능 세계들(실제적으로, 사태 기술들)의 집합을 정렬된 가능세계들(실제적으로, 시점들)의 집합으로 대체했다는 점이다. 이 차이점을 강조하기 위해서 우리는 아마도 Prior 모형들을 삼중체 $\langle \omega, \leq, V \rangle$로서 도입해야 하며, 여기서 $\leq$는 자연수들에 대한 '보다 작거나 같은' 일반적인 정렬이다. 따라서 되돌아보면, 카르납과 Prior가 서로 간에 현재 우리가 알고 있는 바와 같은 양상 논리학에 대한 필수적인 요소들을 모두 제공한 것으로 보인다. 이미 존슨과 타르스키가 필요한 수학을 탐구했고, 카르납과 Prior에서는 현대 양상 논리를 지속시키도록 충분한 철학적 기초보강을 하였다. 모형의 현대적 관념은 삼중체 $\langle U, R, V \rangle$이며 여기에서 U는 어떤 집합(가능세계들, 혹은 더 중립적으로, 색인들 혹은 그냥 점들의)이고, R는 U에 대한 2항 관계(즉 접근가능성 관계(Geach) 혹

은 대안적 관계(Hintikka))이며 V는 값할당이다. 우리가 말하듯이 원소들 U와 V는 카르납 덕분에 얻은 것이고, 관계 R은 Prior 이상으로 살짝 일반화함으로서 얻어지는 것이다. 즉 Prior의 특별한 사례들로 작업하는 대신, 우리는 R이 필연적으로 정렬인 것이 아니라 단지 2항 관계라는 일반적 요구라는점을 견지하는 것이다.

하지만 이것은 역사가 일반적으로 기록되는 방식은 아니다. 소위 가능세계 의미론이나 크립키 의미론은 흔히 S. A. Kripke 덕분이며, 그는 여러 영향력 있는 논문들(Kripke [1959, 1963, 1963a, 1965])에서 현대 명제 양상 논리와 술어 양상 논리의 초석을 다졌다. 상대적으로 영향력이 적은 것들은 Jaakko Hintikka와 Stig Kanger가 쓴 논문들(Hintikka[1957, 1961, 1963]과 Kanger [1957, 1957a, 1957b, 1957c])이다. 실제로 세 학자들은 서로 간에 독립적으로 작업했던 것으로 보인다. 하지만 Kanger가 제일 먼저 출판했다. Kanger의 저작들은 이해하기 어려우며, 이 사실은 그의 겸손한 출판 양식과 결합하여 그에 걸맞게 알려지지 못하게 된 원인인 것 같다.(Hintikka의 관대한 고찰을 참조하라.) Hintikka는 더 영향을 끼쳤으며, 특히 철학자들에게 영향을 미쳤다. 그의 저작이 크립키의 저작보다 양상 논리의 형식적 발전에서 덜 중요한 이유는 아마도, 수학적 측면을 부각시키지 않고 증명을 생략하는 그의 제시 방식 때문인 것 같다.

5. 다른 전통들

앞의 절들에서 우리는 우리에게 초기 양상 논리의 주된 발전으로 보이는 것들을 설명해 보았다. 어떤 역사도 완전하지 않으며 여기서 기록되는 출발들이 우리가 주된 전통으로 간주하는 것 속으로 발전하지 않으면서 이루어졌다. 이 절에서 우리는 간단히 대여섯 시도들을 간단히 언급할 것이다.

첫째로, 소위 양상 논리에 대한 확률적 해석이라는 것이 있으며 그 맹아는 괴델[1933]에서 발견된다. 최근의 발전의 관점에서 우리는 이 시도가 바로 지금 새로운 전통으로 뻗어나가고 있다고 말할지 모른다. Montague[1963], Friedman[1975], 그리고 Solovay[1976]을 거쳐서 이것은 그 자체의 문헌들을 양산하기 시작했다. 이에 대한 추가적인 정보를 위해서는, Boolos[1979]와 이 책의 II.9절을 참조하라.

아직 미발달된 것 이상으로 함축성 있는 또 다른 시도는 J. C. C. McKinsey에 의해서 시도되었으며, 그는 현재 양상 논리에 대한 McKinsey의 구문론적 해석으로 알려진 것을 기술했다.(McKinsey[1945]). McKinsey의 생각은 아마도 Fitch[1937, 1939]에서 이미 보여졌으며, 그것은 Morgan[1979]에서 다시 시도된다. 세 번째 시도는 Alonzo Church에 의해서 일련의 논문들(church [1946, 1951, 1973, 1974])에서 이루어졌다. 이 영역에 대한 최근의 공헌들은 Parsons[1982]와 C. A. Anderson[1980]이다. (이 책의 II.87장도 참조하라.) 언급할 가치가 있는 네 번째 시도는 Arthur Prior의 3차 양상 논리의 출현과 함께 이루어졌다. 다치 양상 논리는 폭넓은 분야가 아니며 어떤 경우에는 주로 우리가 대수적 전통이라고 부르는 것에 속한다. 하지만 Prior[1957]에서 최초로 정의된 <Q>체계는 특별한 철학적 관심을 요하는 것으로 보인다. 예를 들어서 Fine[1977]을 보라.

최종적으로, 직관주의적 양상 논리라 불리는 하나의 전통이 있어야만 하지만, 그런 모토 하에서 발견될 수 있는 부가적인 전통이 오늘날 있기나 한지는 논쟁거리이다. 아마도 Fitch[1948], Curry[1950],

그리고 Prawitz[1965]가 시도들로 간주될 수 있지만, 그것들은 양상성에 대한 분석으로서 별로 전망이 좋지 않다. 그리고 의미론에 대한 작업도 지금까지 고전적인 정신에 한정된다.(Bull[1965a, 1966a], Fischer Servi[1977, 1981]) 왜 직관주의적인 경향의 논리학자들이 이 분야에 별로 관심을 두지 않았는지는 분명하지 않으며 지식(extra-mathematical 지식을 포함하는), 의무, 명령법(imperative), 지각, 그리고 넓은 의미에서 양상적인 다른 관념들에 대한 직관주의 논리적 분석을 보는 것은 흥미로울 것이 틀림없다.