Enderton, Herbert B.(1972), *An Mathematical Introduction To Logic*, Academic Press, Inc.

1차 술어 논리의 의미론

[79쪽]---

2.2절. (1차 술어 논리 체계에서의)[1] 참과 모형들

1차 술어 언어에 대한 구조(structure)는 다음을 제공해야 한다.

(1) 보편 양화사 기호($\forall$)가 지시하는 것들의 집합.

(2) 다른 매개변수들(parameters)(술어와 함수기호들)이 지시하는 것들.

형식적으로 말해서 우리에게 주어진 1차 언어에 대한 구조(structure) $\mathfrak{A}$는 하나의 함수인데, 그 정의역은 매개변수들의 집합이고 그 치역은 다음과 같다.

(1) $\mathfrak{A}$는 양화사 기호 $\forall$에 비공집합 $|\mathfrak{A}|$를 할당하며 이것은 $\mathfrak{A}$의 전체집합(universe)라 불린다.

(2) $\mathfrak{A}$는 각 n-항 술어 기호 P에 n-항 관계 $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$를 할당한다. 즉 $P^{\mathfrak{A}}$는 전체집합의 원소들의 n-중체들의 어떤 집합이다.

(3) $\mathfrak{A}$은 각 상항 기호 c에 전체집합 $|\mathfrak{A}|$의 한 원소 $c^{\mathfrak{A}}$를 할당한다.

(4) $\mathfrak{A}$는 각 n-항 함수 기호 f에 $|\mathfrak{A}|$ 위에서(on)의 n-항 연산 $f^{\mathfrak{A}}$을 할당한다. 즉 $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$이다.

기본 아이디어는 $\mathfrak{A}$가 매개변항들에 의미를 할당한다는 것이다. $\forall$은 "$|\mathfrak{A}|$에 있는 모든 것에 대하여"를 의미한다. 기호 c는 점 $c^{\mathfrak{A}}$의 이름이다. 원자식 $Pt_1 \cdots t_n$은 t_1, $\cdots$, t_n이라는 이름을 가진 점들의 n-중체가 $P^{\mathfrak{A}}$의 관계에 있다는 것을 의미한다.(우리는 곧 이런 조건들을 더욱 조심스럽게 다시 설명할 것이다.)

[80쪽]---

전체집합 $|\mathfrak{A}|$가 공집합이면 안된다는 점을 유의하자. 또한 $f^{\mathfrak{A}}$의 정의역 역시 $|\mathfrak{A}|^n$ 전부임을 유의하자. 즉 우리는 전체집합의 어떤 부분에 한정되어 정의되는 함수들에 대해 어떤 조항도 규정하지 않았다.

[예] 산술의 예.

[81쪽]---

문장들 δ와 구조들 $\mathfrak{A}$에 대하여 "δ가 $\mathfrak{A}$에서 참이다"는

$$\models_{\mathfrak{A}} \delta$$

1) 이 구절은 번역자(파깨비)가 추가한 것임.

로 표시하는데, 이것의 조건을 정의하려면, 바른식(wff)들에 관련된 보다 일반적인 개념(notion)을 먼저 정의하는 것이 낫다. 다음을 가정하자.

ϕ는 우리 언어의 어떤 바른식이다.

$\mathfrak{A}$는 그 언어의 (하나의) 구조이다.

s: $V \rightarrow |\mathfrak{A}|$는 모든 변항들의 집합 V에서 $\mathfrak{A}$의 전체집합 $|\mathfrak{A}|$로 가는 어떤 함수이다.

그러면 우리는 $\mathfrak{A}$가 "s로 ϕ를 만족시킨다(satisfy)"를

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \phi[s]$$

라고 표기하고 이것이 의미하는 바를 정의할 것이다.

먼저 직관적으로 설명하자면 그 내용은 다음과 같다. $\vDash_{\mathfrak{A}} \phi[s]$인 경우 그 경우에만(iff), 변항 x가 자유롭게 나타나는 모든 경우에 그것은 $s(x)$로 번역되는, $\mathfrak{A}$에 의해 결정되는 ϕ의 그런 번역이 참이다.

만족(satisfaction)의 형식적 정의는 다음과 같이 진행된다.

I. 항들(terms)

우리는 다음과 같은 확장된 함수(extension) $\bar{s}$를 정의한다.

$$\bar{s}: T \rightarrow |\mathfrak{A}|$$

이 함수는 모든 항들의 집합 T에서 $\mathfrak{A}$의 전체집합으로 가는 함수이다. 근저의 아이디어는 $\bar{s}(t)$는 항 t라는 이름을 가진 전체집합 $|\mathfrak{A}|$의 원소라는 것이다. $\bar{s}$는 다음과 같이 회귀적으로 정의된다.

1. 각 변항 x에 대하여, $\bar{s}(x) = s(x)$.
2. 각 상항 기호 c에 대하여, $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$.
3. 만약 t_1, …, t_n가 항들이고 f가 n-항 함수 기호라면
$\bar{s}(ft_1 \cdots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \cdots, \bar{s}(t_n))$이다.

위와 같은 s의 확장 함수 $\bar{s}$가 유일하게 존재한다는 것은 회귀정리(recursion theorem)

[82쪽]---

에 의해 도출된다.(1.2절) 이 때 항들이 자유롭게 생성된다는 사실을 사용해야 한다.(2.3절). $\bar{s}$가 s와 $\mathfrak{A}$에 의존한다는 점에 유의하라.

II. 원자식(atomic formulas)

원자식들은 명시적으로(explicitly) 정의되었으며 귀납적으로(inductively) 정의된 것은 아니다. 그러므로 원자식들의 만족에 대한 정의 역시 명시적(explicit)이며, 회귀적으로 정의되는 것이 아니다.

(1) $\vDash_{\mathfrak{A}} \approx t_1 t_2$인 경우 그 경우에만(iff) $\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$

(따라서 $\approx$는 $=$를 의미한다. $\approx$가 논리적 기호이며 아무렇게나 해석될 수 있는 매개변항이 아님을 유의하라.)

(2) n-항 술어 매개변항 P에 대하여

$\vDash_{\mathfrak{A}} Pt_1 \cdots t_n[s]$인 경우 그 경우에만 $< \overline{s}(t_1), \cdots, \overline{s}(t_n) > \in P^{\mathfrak{A}}$이다.

III. 다른 바른식들

우리가 귀납적으로 정의한 바른식들에 대해서는 여기서 그 만족이 회귀적으로 정의된다.

(1) 원자식에 대해서는 그 정의가 위의 내용과 같다.

(2) $\vDash_{\mathfrak{A}} \neg\phi[s]$인 경우 그 경우에만 $\nvDash_{\mathfrak{A}} \phi[s]$이다.

(3) $\vDash_{\mathfrak{A}} (\phi \rightarrow \psi)[s]$인 경우 그 경우에만 $\nvDash_{\mathfrak{A}} \phi[s]$이거나 $\vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]$이거나, 혹은 둘 다이다.

(달리 말하자면 만약 $\mathfrak{A}$가 s로 ϕ를 만족시킨다면 $\mathfrak{A}$는 s로 ψ를 만족시킨다.)

(4) $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\phi[s]$인 경우 그 경우에만, 모든 $d \in |\mathfrak{A}|$에 대하여, $\vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s(x|d)]$가 있다.

여기서, $s(x|d)$는 다음의 한 조건 외에는 s와 정확히 동일한 함수이다. 즉 그 조건은 변항 x에 대한 값으로 d를 할당한다는 것이다. 이것은 다음의 방정식으로 표현될 수 있다.

$$s(x|d)(y) = \begin{cases} y \neq x\text{이면} & s(y) \\ y = x\text{이면} & d \end{cases}$$

(따라서 $\forall$는 "$|\mathfrak{A}|$의 원소 중 임의의(모든) 것에 대하여"를 의미한다.)

이 지점에서 독자들은 81쪽에서 $\vDash_{\mathfrak{A}} \phi[s]$의 진리조건을 직관적으로 정의한 내용을 재고하고 그것이 어떻게 형식화되었는지를 관찰하고 싶을지 모른다. 우리는 또한 만족의 정의가 바른식들이 자유롭게 생성된다는 사실과 함께 회귀 정리를 다르게 응용한 것임을 언급할 필요가 있다. 그 정의는 1.2절의 회귀 정리가 어떻게 응용되는지를 보다 명료하게 보여주기 위해서 함수들을 사용하여 재진술될 수 있다.

(i) 하나의 고정된(구체적인) $\mathfrak{A}$를 생각하자.

(ii) (원자식들에 정의된 함수 h를 확장하여) 다음과 같은 함수 $\overline{h}$를 정의하자. 임의의 바른식 ϕ에 대하여, $\overline{h}(\phi)$는 V에서 $|\mathfrak{A}|$로의 함수들의 집합이다.

(iii) 다음과 같이 정의하자.

$\vDash_{\mathfrak{A}} \phi[s]$인 경우 그 경우에만 $s \in \overline{h}(\phi)$이다.

[83쪽]--

h에 대한 명시적인 정의와 그 확장 $\overline{h}$를 고유하게 결정하는 규정들을 계속 써 내려가는 것은 독자들의 연습문제로 남겨두도록 하겠다.(연습문제 7장을 보라.) 하나의 미려한(elegant) 대안은 $\overline{h}(\phi)$가 ϕ에 자유롭게 나타나는 변항들의 집합 위의(on) 함수들의 집합이 되도록 하는 것이다.

[정의]

Γ가 바른식들의 어떤 집합이고 ϕ가 하나의 바른식이라 하자. 그러면 Γ가 ϕ를 "논리적으로 함축하는"($\Gamma \vDash \phi$) 경우 그 경우에만, 그 언어에 대한 모든 구조 $\mathfrak{A}$와, $\mathfrak{A}$가 s로 Γ의 모든 원소를 만족시키는 그런 모든 함수 $s: V \rightarrow |\mathfrak{A}|$에 대하여, $\mathfrak{A}$는 또한 s로 ϕ도 만족시킨다.

우리는 1장에서 항진적 함축(tautological implication)에 대해서 사용하였던 것과 같은 기호, “$\vDash$”를 사용한다. 하지만 이제부터는 이 기호를 논리적 함축(logical implication)에 대해서만 사용할 것이다. 앞에서와 마찬가지로 우리는 “$\{\gamma\}\vDash\phi$” 대신에 “$\gamma\vDash\phi$”라고 쓸 것이다. $\phi\vDash\psi$이고 $\psi\vDash\phi$인 경우 그 경우에만 ϕ와 ψ가 “논리적으로 동등하다(logically equivalent)”라고 말할 것이다.

1차 술어 언어에서 항진명제들에 유비되는 것은 타당한 식들이다. $\varnothing\vDash\phi$(흔히 “$\vDash\phi$”라고만 쓴다.)인 경우 그 경우에만 ϕ는 “타당하다”(valid). 따라서 모든 $\mathfrak{A}$와 모든 $s: V\to|\mathfrak{A}|$에 대하여 $\mathfrak{A}$가 s로 ϕ를 만족시키는 경우 그 경우에만 ϕ가 타당하다.

이 지점에서 우리는 잠시 멈춰서 우리가 구조 $\mathfrak{A}$가 s로 바른식 ϕ를 만족시키는지 그렇지 않은지를 알고자 할 때 s가 주는 모든 정보를 알아야 하는 것은 아님을 확인하자. 문제가 되는 것은 ϕ에서 자유롭게 나타나는 (유한한 개수의) 변항들에서 함수들 s의 값들일 뿐이다. 특히, ϕ가 문장이면 s는 전혀 문제가 되지 않는다.