DAG WESTERSTAHL 의 "Quantifiers in Formal and Natural Languages"에서, 프레게의 양화사 개념에 대한 내용 정리.

Handbood of Philosophical Logic, Vol IV.

파깨비 정리(www.pakebi.com)

1.2.2. 1항짜리 대 2항짜리 양화사들

프레게는 자연 언어에서의 1항짜리 양화사 단어들이 2항 양화사들을 나타낸다는 것을 잘 알고 있었다. 예를 들어서, '개념과 대상에 관하여'에서 그는 다음과 같이 썼다.

> …'모든', '어떤', '아닌', '몇몇의'와 같은 단어들은 개념 용어들 앞에 붙는다. 보편적이고 특수한 긍정적 그리고 부정적 문장들에서, 우리는 개념들 간의 관계들을 표현한다. 즉 우리는 관계의 특별한 종류를 지적하기 위해서 단어들을 사용한다. (Frege[1892], p.48, my tialics).

하지만 그는 또한, 이러한 2항짜리 (아리스토텔레스적) 양화사들이 1항짜리 (3)과 문장 연결사들에 의해서 정의될 수 있다는 것을 알고 있었다. 이것은 당시에 결코 사소한 발견이 아니었으며, 프레게는 1항짜리 보편 양화사의 능력과 단순성에 감동받았음에 틀림없다. 그의 논리 언어에서 그는 항상 그것을 단일한 원초적 양화사로서 선택했다.

1항짜리 양화사들의 사용은 술어 논리의 특징이 되어버렸으며 이 논리에 의해서 수학적 추론을 성공적으로 형식화함에 따라서 프레게의 선택은 입증되었다고 분명히 말할 수 있다. 하지만 이로부터, 동일한 선택이 자연 언어의 추론을 형식화하는 데에도 적당하다는 것이 따라 나오지는 않는다. 확실히, 우리는 1항짜리 양화사들이 일반적인 양화사 단어들의 지칭체들로서 적당하지 않다는 것을 보게 될 것이다. 더 나아가서, 모든 2항짜리 자연언어 양화사들이 1항짜리 양화사들과 문장 연결사들에 의해서 정의될 수 있는 것은 분명히 아니다.

나중에 곧 보게되겠지만, 자연언어 문맥에서의 2항짜리 양화사들에 대한 그러한 선호는 양화사에 대한 프레게의 관점과는 결코 양립하지 않는다.

1.2.3. 논리적 참과 메타 논리학

완전성이 프레게에게 원리적으로 유용한가와 같은 메타 논리학적 쟁점들에 대한 더밋-골드파브 논쟁으로 되돌아가보자. 논리의 완전성에 대한 일반 관념은 논리적 참(혹은 귀결)의 관념, 즉 모든 모형에서의 참을 전제한다. 하지만 후자의 관념은 프레게가 고려하지 않은 것이 분명하다. 골드파브가 언

급하듯이 그는 그 해석이 다양할 수 있는 비논리적 상항들을 가지고 있지 않았으며,(그는 그러한 상항들의 사용을 명시적으로 거부한 것으로 보인다.) 또한 전체 집합이 다양할 수 있다는 생각도 고려하지 않았다. 하나의 전체 집합, 즉 모든 대상들의 전체 집합 U이면 충분했으며, U에서의 단순한 진리만이 프레게의 관심을 끌었다.

하지만 U에서의 참의 관념은 논리적 참의 관념과 매우 근접해있다. 생각을 고정하기 위해서, 고차 논리학의 몇 가지 표준적인 버전을 고찰해 보자. 현행 논의의 목적을 위해서 우리는 비논리적 기호들이 없는 고차 논리를 프레게적 논리학(Frege's logic)과 동일시하겠다. 그러면 우리는 프레게가 어떤 표준적인 논리적 참들도 '간과하지' 않았음을 관찰할 수 있다. 왜냐하면 L_w에서의 각 문장 ψ가 프레게의 논리학에서, 비 논리적 상항들을 '양화해 냄'(quantifying out)으로써 얻어지는, 명백한 번역 ψ*를 가지고 있기 때문이다. 예를 들어서,

$$\forall xPx \rightarrow Pa$$

는

$$\forall X \forall y(\forall xXx \rightarrow Xy)$$

로 번역되고 유사하게 더 고차의 문장들로 번역된다.

(9) 만약 ψ가 논리적으로 참이면 ψ*이 U에서 참이다.

라는 것은 명백하다. 삽입구적인 관찰(parenthetical observation)이 여기서 필연적이다. 논리적 참은, **모든** 모형들(그것이 집합이든 아니든 간에)에서 참이라는 것 대신에, 모든 **집합** 모형들에서 참인 것으로 정의되는 경우가 많다. 전자('집합' 모형이 아닌 '모든' 모형의 경우)의 관념은 진정한(real) 논리적 참이며, (9)가 명백하다는 것은 이러한 관념에서 볼 때의 것이다. Kreisel이 강조했듯이, 후자의 관념을 사용하는 것은 1차 논리에서만 정당화되는데, 그것은 거기에서 두 관념들이 일치하기 때문이다.[즉 모든 모형에서 참이기 위한 필/충은 모든 집합 모형에서 참이라는 것] (이것은 일반적인 완전성 증명들로부터 따라 나온다.) 다른 한편으로는 더 고차의 문장들에서는, 이것은 열린 문제이다. Kreisel[1967]과 비교해 보라.

1차 술어 논리에서는, 유한한 반례들을 가지지만, 무한한 U에서는 여전히 참인 다음과 같은 문장,

$$\exists x \exists y(x \neq y)$$

들을 무시하는 경우에 (9)로의 전환이 있다.

<정리와 증명>

따라서, 어떤 의미에서, 만약 우리가 프레게가 했던 대로, 고정된 무한 전체집합을 가지고 있으며 비

논리적 상항들이 없다면 이것은 1차 술어 논리에서는 아무런 차이도 만들지 않는다. 더 엄밀하게는, 프레게 논리학의 참인 Π_1^1 문장들이 무한 모형들에서의 표준적인 1차 술어 논리적 참들에 정확히 상응한다는 것이 위 정리로부터 따라 나온다.

그렇다면 결론적으로, 완전성과 건전성과 같은 개념들은 프레게에게 직접적으로 가용하지는 않았던 것을 알 수 있는데, 그것은 프레게에게는 없었던 논리적 참의 개념을 전제하기 때문이다. 하지만 더밋의 입장은 여전히 본질적으로 옳다고 나는 생각한다. 즉 프레게의 작업은 모형 이론과 증명 이론 간의 이원론적 버전을 도입하고 있는 것이다. 왜냐하면 프로게는 참의 관념을 가지고 있었고, 그것은 증명가능성(provability)과 혼동하지 않았음이 분명한 개념이다. 분명히 그는 자신의 체계의 모든 정리들이 참인지를 고려했다. 우리가 아는 한, 그는 모든 참인 문장들이 증명가능(probable)한가라는 역의 질문을 제기하지 않았다. 하지만 '그가 파악한 바 안에서'는 확실히 모든 참인 문장들이 증명가능했다. 그리고 이 질문은 위에서 언급한 것처럼, 완전성 물음의 버전으로 나타난다. 더욱이, 우리가 Π_1^1 문장들에 관심을 국한한다면 그 답변은 '예'이고 그렇지 않다면 '아니오'이다.