DAG WESTERSTAHL 의 “Quantifiers in Formal and Natural Languages”에서, 프레게의 양화사 개념에 대한 내용 정리.

Handbood of Philosophical Logic, Vol IV.

파깨비 정리(www.pakebi.com)

1.2.1 2차 수준 개념들로서의 양화사들

프레게의 이론적 틀에 대한 기본적 사실들(하지만, 근본적인 사항들)

[원초적 항목]

모든 항목들은 ‘대상들’이거나 ‘함수들’이다. 이 범주들은 원초적이고 그래서 정의될 수 없다.

[함수]

- 함수와 대상의 차이: 함수들은 그들이 (하나 이상의) 빈 자리를 갖는다는 점에서 대상들과 구분된다.(이것들은 불포화된 것이다)
- 빈 자리들이 적당한 ‘논항들(arguments)’로 채워지면 ‘값’을 갖게 된다.
- 그 값은 항상 어떤 대상이다.
- 논항들(arguments)은 대상들일 수도 있고 다른 함수들일 수도 있다.
  1차 수준 함수들의 경우: 이 함수들의 논항들은 대상들이다.
  2차 수준 함수들의 경우: 이 함수들의 논항들은 1차 수준 함수들이다.
  ◎ 수준들을 섞는 것은 허용되지 않는다.
- 모든 함수들은 총체적이다. : 즉 올바른 종류의 모든 논항들에 대해서 정의된다. 따라서 모든 논항들에 대해, 그것이 함수에 대입되었을 때 어떤 값을 갖는다.(주로 논리학에서는 참/거짓이다.)
- 함수들은 그 값으로 취하는 논항들의 숫자에 따라서 ‘1항짜리’, ‘2항짜리’, 등으로 불린다.
- 개념들은 두 진리값들 중의 하나를 갖는 함수들이라고 간주된다. 따라서 이것들은 수준들이며, 다른 함수들과 마찬가지로 ‘arities'이다.

[이름]

- 논리적 언어(Begriffsschrift)에서의 의미있는 표현들은 단순한 이름들이거나 복합적 이름들이며 이것들은 대상들이나 함수들을 나타낸다.
- 이름들은 의미와 지치세를 갖는다. 오직 지시체가 여기(논리학/메타논리학)서 문제될 뿐이다.

<구문론/의미론>

- 구문론과 의미론의 수준은 구분되면서도 대응되는 것이 중요하다.

그래서 함수들도 (그 이름에 빈 자리가 있듯이) 빈 자리들을 역시 가진다.(이 빈 자리는 특별한 문자로 표시된다.) 이 빈자리들은 적당한 대상이나 함수의 이름들로 채워질 수 있다. 특히 문장들은 (복합적인) 대상 이름들이며, 진리값을 지칭한다.

-복합 함수명들은 복합 대상명들에서 단순 이름들을 제거하고 그에 해당하는 빈 공간들을 남겨둠으로써 얻을 수 있다.

<예> 23은 14보다 크다.

우리는 여기서 다음의 1차 수준 함수(개념)명들을 얻게 된다. 다음은 이러한 1차 수준 함수명들이다.

x는 14보다 크다.

23은 y보다 크다.

x는 y보다 크다.

그리고 2차 수준 함수명도 얻을 수 있다. 그건 다음과 같다.

$\Psi(23, 14)$.

[고찰 사례]

이제 다음과 같은 표현이 1항짜리 1차 수준 개념명이라고 하자.

(1) $F(x)$

그러면 다음은 문장이다.

(2) $\forall xF(x)$

프레게에 따르면, (2)는 다음과 같은 2차 수준 개념명에 개념명(1)을 논항으로서 삽입함으로써 얻어진다.

(3) $\forall x\Psi(x)$

(3)은 프레게 논리학에서 단순명이다. 이것은 1항짜리 2차 수준 개념을 지칭한다. 즉 어떤 1항짜리 1차 수준 함수 f(x)에 적용되었을 때, f(x)가 모든 논항들에 대해서 참인 값을 가질 때 참의 값을 주며, 그 외의 경우에는 거짓의 값을 준다.

물론 이것은, 보편 양화된 문장들에 대한 일반적인 참 조건의 한 유형이다. (2)가 참일 필요충분조건은 F(x)가 모든 대상들 x에 대해서 참이라는 것이다. 하지만 프레게의 형식화는 (3)이, 예를 들어서,

(4) $\neg\forall x\neg\Psi(x)$

(5) $\forall x(\Phi(x)\rightarrow\Psi(x))$

와 같은 많은 가능한 2차 수준의 개념들 중의 하나일 뿐임을 나타낸다. (4)는 존재 양화사이다. (5)는

두 개의 1항짜리 1차 수준 개념들을 서로 결합시킨 2항짜리 2차 수준 개념이다. 이것들은 모두 프레게 논리학에서 (3)에 의해 정의될 수 있으며, 따라서 복합명들에 의해서 지칭될 수 있다.

유사한 방식으로, 1차 수준 함수들에 대한 양화가 3차 수준의 개념들에 의해서 도입될 수 있다. 기타 등등.

요약하자면, 우리는 양화사에 대한 잘 정의된 프레게적 개념이 있음을 알 수 있다.

> 구문론적으로, (단순) 양화사명들은 변항을 구속하는(variable-binding) 연산자들로 간주될 수 있다(하지만 프레게의 변항 사용에 대해서는 Note 7을 보라).
> 의미론적으로, 양화사들은 2차 수준 개념들이다.

만약 우리가 비-프레게적인 방식으로, n-항 1차 수준 개념의 외연을 그 아래에 떨어지는 대상들의 n 중체의 집합이 되도록 한다면, 그리고 n-항 2차 수준 개념의 외연이 그 아래에 들어가는 1차 수준 개념들의 외연들의 n 중체들의 집합이 되도록 한다면, (3)-(5)의 양화사들의 외연들은 다음과 같이 된다.

(6) $\forall_U=\{X \sqsubseteq U: X=U\}$: 이 양화사의 외연은 전체집합이다.

(7) $\exists_U=\{X \sqsubseteq U: X \neq \varnothing\}$: 이 양화사의 외연은 공집합 아닌 부분집합이다.

(8) $all_U=\{\langle X,Y\rangle: X \subseteq U \;\&\; Y \subseteq U \;\&\; X \subseteq Y\}$, :

이 경우 양화사의 외연이 이렇게 되는 까닭 - 이 문장을 “∀x,y Φ(x,y)”[예: 모든 사람은 동물이다]로 보기 때문이다.

여기서 U는 전체집합이다. 전체집합이 여기서 고정되었으며 집합의 원소가 되기에는 너무 크다는 사실과는 별개로, 이 외연들은 모형 이론적 의미에서 일반화된 양화사들이다. 1.4절과 비교해 보자.