『계산가능성과 논리』 해설서

- 파깨비 씀-

제2장, 대각화

왜 “대각화”라고 부르는가?

앞에서도 설명했듯이, 대각화는 열거불가능성을 증명하는 방법이다. 14쪽을 보면 두 번째 문단에서 이러한 설명이 제시되고 있다. 그런데 책에서 설명하고 있는 설명은 직관적으로 이해하기가 쉽지는 않다. 그리고 대각화의 개념 자체의 출발점 자체가 “게오르그 칸토르”(이 수학자의 이름을 자주 말하게 되는군.-_-;;)가 제시한 증명에서 출발하는 것이고, 그것은 교재에 있는 것처럼 형식적으로 되어있지 않다. 다시 말하면 교재에 있는 ‘대각화’의 방법은 원래 방법을 일반화해서 형식화한 것이다.

그러므로 일반 학생들이 처음 시작할 때에는 일반화되지 않은 내용을 먼저 이해하는 것이 편하다. 그것은 바로 칸토르의 대각선 논법이다. 먼저 “대각화”라는 말을 보자. 이 말 속에 들어 있는 ‘대각’이라는 말은 곧 ‘대각선’을 의미한다. 그리고 이 대각선은 글자 그대로 대각선을 가리키는 것이다. 하지만 교재에서 볼 수 있는 내용에서는 대각선을 찾기가 어려울 것이다. 이 대각선은 원래 칸토르의 증명을 들여다보면 시각적으로 나타나 있다.

이것을 쉽게 이해하기 위해서는 원래 칸토르의 증명에 가까운 내용을 먼저 보는 것이 도움이 된다. 다음을 살펴보자. (김용운·김용국, 『집합론과 수학』, (우성문화사:1989), 235-236쪽에서 인용)

<정리> 0과 1 사이의 실수 전체의 집합은 자연수 전체의 집합보다 크다.

<증명> 0과 1 사이의 실수 전체의 집합과 자연수 전체의 집합 사이에 ‘1대 1 대응이 성립한다’고 가정하자. 그리고 0과 1 사이의 모든 실수를 소수로 나타낸다. 이 때, 유리수는 유한 소수 아니면 (무한) 순환소수가 되는데, 유한 소수에 대해서는, 가령, 0.1=0.99999…와 같이 생각하여 순환소수로 나타낸다. 이렇게 하면, 0과 1 사이의 모든 실수는 무한소수로 나타내어진다. 그리하여 이들 실수의 낱낱에 a_1, a_2, … 등을 대응시켜 다음의 표와 같이 배열한다.

$a_1 \quad = a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots a_{1n} \cdots$

↘

$a_2 \quad = a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots a_{2n} \cdots$

↘

$a_3 \quad = a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \cdots a_{3n} \cdots$

↘

$$
\begin{array}{llll}
\cdots & = \cdots\ \cdots & \cdots & \\
 & & \searrow & \\
a_n & = a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ \cdots & a_{nn} & \cdots \\
 & & & \searrow \\
\cdots & = \cdots\ \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

(단, a_{nn}은 0부터 9 사이의 어떤 정수임.)

여기서 만일 이 수열에 들어가지 않는 0에서 1 사이의 무한소수가 있다고 하면, 이 무한소수의 집합은 열거가능하지 않다. 왜냐하면 '열거가능하다'의 정의 상, 자연수와 1대 1 대응되어야 하기 때문이다.

그런데 다음과 같은 무한소수 b를 생각할 수 있다.

$$b = 0.\ b_1 b_2 b_3 \cdots$$

(단, a_{nn}이 1이 아니면 b_n은 1, a_{nn}이 1이면, b_n은 2)

이 수 b는 위의 표에 적힌 어떤 수와도 다르다. 따라서 0과 1 사이의 모든 실수는 이 표에 들어있다는 가정과 어긋나므로, 0과 1 사이의 모든 실수는 열거가능하지 않다. <증명 끝>

이상과 같은 증명의 내용은 조금만 생각해 보면 이해하기가 크게 어렵지 않을 것이다. 그런데 이상의 내용을 살펴보면, 위에 숫자들을 나열해 놓은 후 새로운 숫자 b를 찾아내는 방법에서 대각선이 나타난다. 즉 대각선이 증명 방법에 있어서 핵심인데, 이러한 방법을 형식적으로 정리한 것이 곧 교재의 14쪽과 15쪽에 나타난 설명의 내용이다.

그렇다면 설명을 들여다 보도록 하자. 교재의 설명에서 양의 정수들의 집합들은 무한소수에 상응한다. 그리고 그 목록은 무한소수들의 나열에 대응된다. 한편 새로운 집합 $\overline{D}(L)$은 곧 대각선을 따라서 새로이 구성해내는 새로운 소수 b와 같은 것이다. 그렇게 생각하고 $\overline{D}(L)$의 정의를 살펴보면(14쪽) 그 정의가 도대체 무엇을 의미하는 것인지를 이해하기가 쉬울 것이다.

교재에서의 대각화에 대한 설명은 다음과 같은 점을 위해서 칸토르의 증명을 일반화하고 있다.

<1> 칸토르의 증명은 숫자들에만 적용될 수 있을 것 같다. 하지만 이것은 모든 집합에 적용할 수 있다. 그래서 교재에서 나열되는 것은 숫자(무한소수)가 아니라 양의 정수들의 집합이다. 모든 집합에 대각화가 적용될 수 있다면 집합으로 표현할 수 있는 모든 논리적인 대상에 이 대각화의 방법이 적용될 수 있게 되는 것이다.

<2> 칸토르의 증명은 최종적으로 새로운 수 b를 찾아낼 수 있다는 것으로 끝나지만, 논리적인 의미에서 이것은, 0과 1 사이의 모든 실수가 열거되었다는 가정과 모순된다는 것을 보여준다. 그리고 이 맨 마지막의 모순이 증명에서 핵심적이다. 그래서 교재에서의 설명은 이 모순을 분명하게 식으로 보여주는 방법을 제시한다. 17쪽에서 반대각화를 통해서, 맨 마지막에 보여주는 것, 즉 $S_m(m) = 1 - S_m(m)$이 곧 모순을 보여주는 식이다.

끝으로, 칸토르의 증명에서나, 교재에서 구성되는 $\overline{D}(L)$에서나 중요한 것은, 새로운 소수 b를 단 하나 찾아낼 수 있다는 것이 아니다. 증명에서는 b를 하나 구성해내는 것으로 끝난다. 하지만 그 증명의 구조상, 그 b를 목록 속에 추가해 넣어도 대각화의 기법을 따라서 새로운 b'를 구성해 낼 수 있고, 그

작업은 무한히 반복될 수 있다는 것이 더 중요하다. 이것은 학생 각자가 이해해야 하는 부분이다.

무한에 관한 논리적 해명들

18쪽에서부터 설명되는 것은 무한에 관한 논리적 해명들이다. 왜 이런 문제가 제기되는지가 쉽게 다가오지 않는다면 다음과 같이 물어보면 된다.

“자연수는 무한히 많은데, 그보다 더 많다는 것이 정확히 어떤 의미를 갖는가?”

여기에 대해서 우리는 하나의 대답을 들었다.

“자연수는 열거가능하게 많을 뿐이다.”

그렇다면 다시 이렇게 물을 수 있다.

“열거가능하게 많다는 것은 이해하겠지만, 그렇다고 해서 그것을 완전히 열거하는 것은 불가능하지 않은가? 누가 그것을 완전히 열거하는가? 완전히 열거하지 않는다면, 그래서 그 열거가 끝나지 않는다면 그보다 더 많은 것에 대해서 분명하게 말할 수 없지 않겠는가?”

이러한 물음 때문에 제우스 이야기가 나온다. 제우스 이야기는 이러한 구분을 직관적으로 시도하려는 장치이다. 하지만 이것이 정답은 아니다. 논리적인 정답, 정확한 정답은 ‘함수’ 개념에 있다.

18쪽의 두 번째 문단에 다음과 같은 설명이 있다.

“실제로 어떤 집합을 열거가능하다고 부르는 것은 단순히 그 집합이 양의 정수들의 어떤 함수의 (산출값) 범위라고 말하는 것일 뿐이다.”

이 개념을 이야기처럼 풀어서 설명하자면 제우스를 끌어들여서 말할 수가 있는 것이다. 그러므로 여러분이 논리적인 사고에 친숙하다면 제우스 이야기로 우회할 필요는 없다고 본다. 1장에서 강조되었던 것, 즉 어떤 것의 개수를 센다는 것에서부터 나온 1대 1 대응 함수의 존재로 열거가능하게 많다는 것에 대한 분명한 구분 방법을 확립하는 것이 더 도움이 된다.

여러 해설서들에서도 찾아 볼 수 있겠지만, 수학에서 무한에 대해 논리적으로 생각할 필요가 있는 경우가 많다. 특히 미분적분에 대한 수학적 토대를 마련하는 데에서 이러한 문제는 직접 노출된다. 그리고 칸토르가 집합론을 창시하면서 이러한 문제에 직접 답을 제시했다. 그러므로 교재의 1장과 2장에 들어있는 내용들은 모두 이러한 집합론의 내용을 논리적으로 다루기 위한 기본 개념들을 설명한다고 이해하면 된다.

연습 문제

2장의 연습 문제도 그렇게 어렵지 않고 필요한 설명은 교재에 다 나타나 있다. 나머지는 학생들이 머리를 굴려서 아이디어를 내 보는 것이다.