『계산가능성과 논리』 해설서

- 파깨비 씀-

전체 내용의 시작에 대한 소개

왜 열거가능성부터 시작하는가?

이 책의 1장은 “열거가능성”에 대해서 설명하면서 시작한다. 왜 이것에서부터 시작하는가? 이것은 이 단순한 개념이 이후에 따라올 많은 정리들을 증명하기 위한 매우 중요한 수단이 되기 때문이다. 그리고 이러한 수단으로서 열거가능성과 짝지어지는 개념이 있다. 그것은 바로 “열거불가능성”이다.

그런데 이 “열거불가능성”이라는 말은 이 책의 차례를 살펴보면 보이지 않을 것이다. 왜 그런가? 사실 제 2장, “대각화”에서 논의하는 것이 바로 열거불가능성에 대한 것이다. 그리고 대각화라는 것은 곧 열거불가능하다는 것을 증명하는 방법을 가리킨다. 만약 여러분이 집합론의 창시자 칸토르에 대해서 좀 알고 있고 칸토르가 무한집합의 크기 증명을 할 때 사용한 방법을 들어본 적이 있다면 이 대각화라는 것이 어떤 것인지 금방 이해할 수 있을 것이다. 하지만 모른다고 해도 일단은 상관없다. 처음부터 여러분들이 모르는 이야기로 시작해서 모든 것을 너무 어렵게 만들고 싶지는 않기 때문이다. 일단은 이것만 잘 알아두자. 즉 대각화는 열거불가능성을 증명하는 방법이라는 것, 그리고 2장은 열거불가능성에 대한 이야기를 한다는 것이다.

이후에 나올 몇 가지 이야기를 미리 늘어놓아 보겠다. 이 이야기들을 들어보면, 왜 열거가능성과 열거불가능성에 대해서 이야기하는지, 이 개념들을 분명히 이해함으로써 무엇을 하려고 하는지를 대략적으로 짐작할 수 있게 될 것이다. 그래서 여러분이 지금부터 출발하려는 길이 어디로 뻗은 길인지를 알 수 있게 될 것이다.

일단 5장의 제목을 보자. “대각화를 통한 계산불가능성”이라는 제목이 보일 것이다. 5장에서 증명하고자 하는 것은 어떤 함수가 계산불가능하다는 것이다. 그런데 이것을 어떻게 증명할 수 있을까? 미리 상상해 보라. 아마도 금방 방법이 떠오르지 않을 것이다. 그 방법이 곧 대각화를 통해서 어떤 것이 열거불가능하다는 것을 보이는 것이다. 그리고 그 전에,

계산가능성 - 열거가능성
계산불가능성 - 열거불가능성

으로 짝지워 놓고, 어떻게 이렇게 짝지울 수 있는지를 설명한다. 그리고 그 짝짓는 방법을 설명하는 것이 곧 3장이다. 3장은 “튜링 기계”에 대해서 설명한다. 한편 유명한 괴델의 불완전성 정리도, 산술의 공리체계가 불완전하다는 것을 증명할 때 바로 이 열거불가능성을 보임으로써 증명한다. 대충 이 정도만 알아 두자.

튜링 기계는 아주 단순한 작업을 하는 기계인데, 이 기계가 하는 작업이 곧 “계산”이다. 그리고 우리가 생각하는 모든 계산이라는 것은 모두 이러한 단순한 작업으로서의 계산들이 서로 결합하여 이루어지는 것이라는 생각에 바탕을 두고 이 기계에 대해서 논의한다. 이 튜링 기계의 논리적인 구조는 그림으로도 그릴 수 있지만, 어떤 기호들의 배열로도 표시할 수 있다. 따라서 곧 다음과 같은 결론으로 이어질 것이다. 즉 기호의 배열로 표시할 수 있는 튜링 기계는, 그 기호들이 열거가능할 때 존재할 수 있게 된다. 만약 어떤 튜링 기계를 표시하기 위한 기호들이 열거불가능하다는 결론이 나오면 그 튜링 기계는 논리적으로 존재할 수 없게 되는 것이다.

대충 이렇게 이야기를 하면, 왜 ‘열거가능성’부터 시작해서 ‘대각화’로 이어지는지에 대해서는 이해가 될 것이다.

왜 3장은 튜링 기계에 대해서 설명하는가?

그렇다면 튜링 기계에 대한 설명이 바로 다음에 오는 까닭은 무엇인가? 튜링 기계를 기호들의 배열로 나타낼 수 있다고 한다면, 그래, 일단 그렇다고 해 보자. 하지만 왜 그 다음에 튜링 기계에 대한 설명이 오는가? 왜 그렇게 앞쪽에서 튜링 기계에 대해서 설명하는가? 그리고 왜 이 책에 기계에 대한 설명이 나오는가?

이 책이 논리학에 대한 책이라는 것을 먼저 확인해 두자. 독자가 아마 논리학에 대한 관심이 없었다면 이 책에 대해서 관심을 기울여보지도 않았을 가능성이 크다. 그냥 논리학에 대해서 관심이 있는가? 그런 것은 아닐 것이다. 요즘 논의하는, 논리학의 전문가들이 논의하는, 첨단의 현대 논리학에 대해서 관심이 있기 때문에 이 책을 들었을 것이다. 그렇다면 논리학자들이 연구하는 현대 논리학의 특징과 관심거리가 어떤 것인지를 간단히라도 언급할 필요가 있다. 그것은 바로 메타 논리학이다. 즉 논리의 성격과 그 근본이 되는 확실성을 탐구하고 증명하는 것이다.

여기에서 곧 우리는 “어떤 것이 논리적이다”라는 것이 정확히 어떤 의미를 갖는 것인지에 대해서 의문을 제기한다면, 조금은 낯설겠지만, 뭐, 이해할만한 물음이라고 납득할 것이다. 그리고 그에 대한 현재로서의 대답의 특징은, 인간의 직관을 배제하고 대신에 기계적인 절차로서 해명하고자 하는 방향으로 이루어지고 있다는 것이다. 여기에 대해서도 설명이 필요할까? 그래 조금만 설명해 보자.

논리는 흔히 우리들의 사고가 따라야 하는 규칙으로 이해된다. 논리적이지 않은 생각이란 혼란스러운 생각이 되기 쉽다. 조금 건너 뛰자. 논리는 사고와 연관된다는 것으로 가자. 그런데 그 사고란 우리의 마음이나 두뇌가 하는 활동이다. 여기에서 ‘마음’이 걸리는데, 이게 보통 애매한 것이 아니다. 왜냐하면 남들에게 분명해 보이는 것이 다른 사람들에게는 불분명해 보이는 경우가 많기 때문이다. 예를 들어서 수학자들은 1이 0보다 크다는 것도 증명하고 그런다. 그런데 1이 0보다 크다는 것은 너무나 분명하지 않은가? 그것을 어떻게 증명한단 말인가? 그 증명이 논리적일 수 있을까? 이러다 보면 논리적이라고 하는 것의 궁극적인 기준이 애매해지는 것이다. 그래서 그 첨단의 기준을 기계적인 것으로 잡아보았다고

이해하면 편하다. 물론 실제로 왜 그렇게 했는지를 설명하자면 복잡하고, 수학적인 이야기, 수학의 역사에 대한 이야기도 꺼내야 한다. 하지만 그런 것 다 설명하다가는 이 책의 진도를 나갈 수 없다.

결론은 논리의 본성을 이해하기 위해서 기계적인 잣대를 들이댄다는 것이다. 그럼으로써 논리의 본성을 좀더 '객관적으로'(이게 여기서는 애매하게 들릴 가능성이 크지만…) 정립한다는 것이다. 그래서 이제 인간의 마음이 하는 사고활동, 특히 논리적인 사고활동을 모방할 수 있는 기계를 생각해야 했다. 지금은 이런 이야기를 하면 금방 컴퓨터를 떠올릴 것이다. 하지만 이러한 기계를 생각해야 했던 사람은 지금과 같은 컴퓨터가 없던 시대였다. 그리고 실제로는, 그 사람들이 그런 기계(답을 미리 말하면, 튜링 기계)를 생각해냈기 때문에 컴퓨터가 만들어질 수 있었다. 그러므로 순서를 이해 못하고 너무 논리학자들을 바보로 생각하지 말자.

다시 문제로 돌아보면 이렇게 된다. 우리가 마음 속에서 생각할 때, 특히 논리적으로 생각할 때, 그 생각의 가장 중요한 속성은 무엇일까? 그것은 아마도 계산일 것이라고 논리학자들은 생각했다. 그 힌트는 수학과 논리학이 매우 비슷하다는 사실 때문이었다. (사실 논리학자들이 수학자고 수학자들이 논리학자고, 그랬다.) 그래서 계산에서 출발하기로 했고, 계산을 할 수 있는 기계를 어떻게 생각해내는가 하는 것이 문제가 되었다. 거기에 처음 답을 제시한 사람의 이름이 "튜링"(Turing)이고, 그 사람이 답으로 제시한 기계의 이름이 "튜링 기계'이다.

이 튜링 기계로 논리학적으로는 무얼 하는 걸까? 애매하지만, 쉽게 말하자면 이렇다. "논리적으로 가능한가?"하는 물음을 "그와 관련된 튜링 기계를 만들 수 있는가?"하는 물음으로 바꾸고, 그런 튜링 기계가 있을 수나 있는지를 조사하고 증명하는 것이다. 그럼으로써 메타 논리학적인 연구를 한다. 즉 어떤 것이 증명가능한지, 혹은 증명불가능한지를 연구하고, 그것을 위해서 계산가능한지, 계산불가능한지를 연구한다. 그래서 3장에서 튜링 기계에 대해서 설명하는 것이다.

제1장, 열거가능성

불완전한 열거에 대해서

계속 이 책 전체 내용이 왜 이렇게 짜여졌는지에 대해서 설명할 수 있다. 하지만 일단 진도를 나간 후에, 새로운 내용에 들어갈 때마다 지나온 과정을 정리하면서 다시 새로 공부할 내용이 어떤 내용인지, 왜 그런 내용을 연구하는지에 대해서 설명하는 것이 보다 효율적일 것이다. 어차피 처음에 다 설명한다고 하더라도 한참 복잡한 것을 들여다 보노라면 잊을 수도 있으니까 말이다.

열거가능성의 기준이자 첫 출발점은 자연수열이다. 이것은 1쪽에서부터 설명된다. 그 다음에 설명되는 것은 다소 '불완전'해 보이는 열거가능성들이다. 즉

<1> 목록이 중복적이거나

<2> 목록에 빈틈이 있어도

괜찮다. 이것이 2쪽부터 4쪽까지의 내용에서 설명하는 것이다. 이러한 설명을 하는 까닭은, 나중에 어떤 것을 증명할 때 편리하도록 하기 위해서이다. 즉 어떤 것을 증명하다 보면 열거가 가능하기는 한데, 다소 중복된다든지, 혹은 빈틈이 생긴다든지 하는 문제가 발견될 수 있다. 이 때 그렇게 조금 불완전하게 열거된 것으로서 증명이 충분한가 하는 것을 미리 확인해 두는 것이 유용할 것이다. 여기서 미리 확

인해 두면 여러 가지 증명을 할 때 중복되거나 빈틈이 있는 열거가능성을 증명하는 것으로 매번 끝날 수 있지만 여기서 언급하지 않으면 매번 그러한 불완전한 열거가 완전한 열거로 바뀔 수 있음을 다시 보여야 하기 때문이다. 불편한 일이 될 것이다.

열거가능성을 증명하는 방법

그 다음에 설명하는 것은 어떤 것이 열거가능하다는 것을 증명하는 방법이다. 어떤 것이 열거가능하다는 것을 어떻게 증명할 수 있을까? 가장 쉽게 생각하면, 그냥 처음부터 끝까지 늘어 놓으면 된다. 이것은 매우 단순하다. 그리고 이렇게 단순하게 생각해야 한다. 단순한 것이 분명하고 틀릴 위험성이 없기 때문이다.

하지만 단순한 것에서부터 출발은 하되, 거기에서 끝날 수 없는 경우가 있다. 주된 문제거리는 무한집합이다. 자연수의 개수는 무한히 많다. 이것을 어떻게 열거할 것인가? 사실 이것은 그냥 열거될 수 있다고 가정한다. 여기에서부터 출발한다. 수학적으로는, 어떤 것이 열거가능하다는 것을 증명하기 위해서 항상 그 열거된 것 중 아무 거나 골라내도 그것이 다른 어떤 것과의 순서를 결정할 수 있어야 한다는 조건에 의해서 결정한다. 예를 들면 자연수는 무한히 많아도 열거가능한데, 그것은 어떤 자연수 a를 골라내도 다른 자연수 b와 비교해서 어느 것이 먼저이고 어느 것이 나중인지를 결정할 수 있는 것이다.

자연수열을 기준으로 삼고 나서 다른 것이, 특히 무한히 많은 어떤 것이 열거가능한지를 결정하는 방법은 함수를 부여할 수 있는지 확인하는 것이다. 5쪽 맨 밑쪽에서 설명하는 내용, 즉 "집합 A가 열거가능하다고 말하는 것은 다음과 같은 조건을 만족하는 함수 *f*가 존재한다고 말하는 것이다"의 의미가 바로 이것이다.

그 다음에는 함수 *f*의 조건들이 따라 나오는데, 이것을 간단히 설명하면 이렇다. 즉 어떤 것들(집합 B라 하자.)이 열거가능하다면 그것은 자연수들과 1대 1 대응해야 한다는 것이다. 이 개념의 출발은 '센다는 것'이 도대체 무엇인가 하는 의문을 던진 수학자 칸토르의 대답이다. 칸토르는 센다는 것은 자연수와 1대1 대응을 시키는 작업이라고 생각했다. 그리하여 결론적으로는 자연수와 1대1 대응이 될 수 있다면 그것은 자연수와 개수가 같음을 증명하는 것임이 따라 나온다. 특히 무한집합에서 개수를 비교할 때 그러하다.

여기서 1대1 대응이 '된다면'이 아니라 '될 수 있다면'임에 주의하자. 1대 1 대응을 잘못시킨다면 6개의 사과와 6명의 사람들이 서로 모두 짝이 맞지 않을 수 있다. 즉 사과도 하나 남고 사람도 하나 남는 것이다. 그러므로 만약 항상 1대1 대응이 이루어져야 한다면, 이러한 대응관계(함수)에서는 6개의 사과와 6개의 사람들이 서로 개수가 다르다는 판단이 생길 수 있다. 이것은 틀린 것이다. 그러므로 두 집합을 1대1로 대응시키는 최소한 하나의 함수가 있으면 두 집합의 원소의 개수가 같다고 말하게 되는 것이다.

특이 사항 한 가지

별로 대단한 것은 아니지만, 무심코 넘어갈 수 있는 특이 사항 한 가지를 언급하겠다. 이것은 뒤 쪽에

서도 별로 대단히 중요하게 연관되는 것도 아니다. 하지만 수학적 사고 방식을 이해하는 데에 도움이 될지 모른다. 그것은 7쪽 밑에 설명되어 있는 함수들 중 '투입값 영역이 공집합 $\varnothing$인 이상한 함수 e를 양의 정수들의 부분함수로 간주'하는 것이다. 이것은 마치 공집합도 하나의 집합으로 간주되는 것과도 비슷하고, 양화 논리에서 '모든'($\forall$)이 의미하는 바에 아무 것도 없는 경우도 포함되는 것과 비슷하다.

함수 e는 곧 아무런 투입값도 가지지 않고, 그렇기 때문에 아무런 산출값도 가지지 않는다. 그러므로 그냥 e는 e일 뿐이게 된다. 이것도 함수의 하나로 취급될 수 있다는 것이 여기서의 요점이다. 즉 1,2, 3,…과 같은 자연수나 기타 항들도 모두 e와 같은 함수로 취급될 수 있다는 것이다.

개념들을 활용해 보기

열거가능성, 함수, 집합, 등과 같은 이상의 개념들을 활용해서 어떤 것을 할 수 있을까? 8쪽에 그 예가 나와 있다. 즉 유리수의 집합의 크기(원소의 개수)가 자연수의 집합의 크기와 같다는 것을 증명하는 것이다. 증명의 내용은 교과서 8-9쪽을 읽어보면 된다.

여기서 혹시나 헷갈릴 수 있는 것은, 이 증명에서 자연수와 유리수를 하나씩 짝지을 수 있는 방법을 하나 제시하고 있다는 것이다. 이것이 어떻게 증명이 되는가? 앞에서 제시된 개념들을 충분히 이해했다면 이것이 증명이 된다는 것을 이해하겠지만 그렇지 못한 학생들을 위해서 설명하겠다.

앞에서 함수를 설명할 때, 두 집합의 원소를 1대1 대응이 '된다면'이 아니라 '될 수 있다면'임에 주의하라고 강조했었다. 그것은 두 집합을 1대1 대응시키는 함수가 단 하나라도 있다면, 된다는 말이다. 왜 그럴까? 두 집합의 원소가 같지 않은데 어떤 식으로든 1대1 대응시킬 수 있는 방법이 있을까? 글쎄… 유한집합에서는 없을 것이다. 문제는 무한집합이다. 무한집합에서는 헷갈리므로, 유한집합에서 확실하게 개념을 결정해서 이것을 무한집합에 적용할 것이다. 그러므로 우리는 적어도 유한집합에서는 원소들의 개수가 같지 않으면 결코 1대1 대응이 될 수 없음을 결정할 수 있다. 이것을 자연수와 유리수의 개수 비교에 적용한 것이 교과서의 내용이다. (이 증명을 최초로 한 사람은 역시, 칸토르이다.)

다소 헷갈릴 수 있는 것은, 자연수는 유리수의 부분집합이라는 것이다. 즉 유리수의 부분집합과 자연수 전체가 1대1 대응이 될 수 있고, 그 결과 유리수의 집합은 자연수와 1대1 대응되고 난 후에도 남는 것이 있다는 것이다. 하지만 이것은 논리의 문제가 아니라 직관의 문제이다. 논리의 문제는, 정의된 개념들을 일관되게 적용해 나가는 것이다. 두 집합의 크기 비교에 대해서 서로 다르게 정의하고 출발하는 두 경우를 생각해 보자.

<경우 1> 두 집합 A와 B에 대해서, A의 모든 원소가 B에도 있고, B의 모든 원소가 A에도 있을 때, A와 B는 서로 크기가 같다.

<경우 2:교과서의 내용 그대로> 주 집합 A와 B에 대해서, A의 모든 원소에 B의 원소를 빠뜨림 없이 하나씩 대응시키는 함수가 최소한 하나 존재할 때 A와 B의 원소의 개수는 같다.

만약 우리가 <경우 1>과 같이 개념을 정의하고 출발했다면 유리수의 개수는 자연수의 개수보다 더 클 것이다. 하지만 우리는 두 번째 경우와 같이 정의하고 출발했다. 그러므로 유리수는 자연수와 그 집합의 크기가 같다.

그럼 왜 우리는 두 번째 경우의 방식으로 개념을 정의했을까? 거기에는 대체로 실용적인 이유가 관련된다. 첫 번째 경우의 개념은 여러 경우에 활용되기가 어렵다. 예를 들어서 집합 A가 숫자들의 집합이고 집합 B가 한글 낱말들의 집합이라고 하자. 그러면 <경우1>과 같은 정의에서는 이 두 집합의 크기를 비교할 수 없다. <경우2>와 같은 개념을 써야 개수 비교가 가능한 것이다.

연습문제

문제와 풀이는 교과서에 충분히 제시되어 있다. 나머지는 스스로 생각해 보아야 학습이 된다.